

Cálculo Vectorial

Teoría, Coloquio y Práctica

Nº 11- 12

25/05/09 - 01/06/09

Material didáctico elaborado por personal docente de la asignatura Cálculo Vectorial

Unidad Didáctica: Rotacional y Divergencia - Teorema de Green - Teorema de Stokes – Teorema de Gauss.

Objetivos:

Que el alumno logre:

- Expresar y comprender las hipótesis y tesis del teorema de Green.
- Comprender la demostración del teorema de Green, para una región simple tipo I.
- Aplicar el teorema de Green en la resolución de problemas.
- Comprender el significado de rotacional y divergencia de un campo vectorial.
- Resolver problemas aplicando los conceptos de rotacional y divergencia de un campo vectorial.
- Expresar y comprender las hipótesis y tesis del teorema de Stokes.
- Aplicar el teorema de Stokes en la resolución de problemas.
- Expresar y comprender las hipótesis y tesis del teorema de la divergencia.
- Aplicar el teorema de la divergencia para calcular el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada S.
- Aplicar el teorema de la divergencia en la resolución de problemas físicos relacionados con campos eléctricos y campos de velocidades.

Material necesario imprescindible:

Libro de texto:

- STEWART, J.: “Cálculo. Trascendentes tempranas”, (Cuarta Edición). Thomson-Learning. 2001.
- STEWART, J.: “Cálculo Multivariable”, (Cuarta Edición). Thomson-Learning. 2002.
- Tabla de integrales y fórmulas.
- Software sugerido: MuPAD

Actividades:

Una lectura comprensiva de las definiciones, enunciados y ejemplos desarrollados en las secciones indicadas del texto. Elaboración individual de las respuestas del cuestionario. Discusión grupal sobre procedimientos y resultados. Análisis crítico de los ejemplos. Reproducción de gráficos con MuPAD.

1- Teorema de Green:

En esta unidad se desarrolla el Teorema de Green, el cual permitió modelizar diversas situaciones en el marco de las teorías de electricidad, magnetismo y el análisis de fluidos.

- 1.1- ¿ Bajo qué condiciones una curva plana C definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, es cerrada?
- 1.2- Explique el significado de curva C cerrada y simple.
- 1.3-¿Bajo qué condiciones una curva plana C es suave a trozos?
- 1.4-Complete los siguientes enunciados:
 - 1.4.a- Una curva en el plano, cerrada y simple C , suave a trozos tiene orientación positiva si.....
 - 1.4.b- Una curva en el plano, cerrada y simple tiene orientación negativa, si.....
- 1.5- Indique que tipo de integrales vincula el teorema de Green.
- 1.6- Bajo qué hipótesis es posible aplicarlo.
- 1.7- Explique en lenguaje coloquial el significado de la tesis del teorema de Green.
- 1.8- Expresé en lenguaje simbólico la tesis del Teorema de Green.
- 1.9- En las notas de clase (transparencias) encontrará una demostración del Teorema de Green para el caso de una región en el plano que puede definirse como tipo I y tipo II. Léala atentamente y trate de reproducirla justificando cada paso.
- 1.10- Los ejemplos 1 y 2 de la página 1070 muestran dos casos en los cuales el cálculo de una integral doble resulta más sencillo que el cálculo de una integral de línea. Calcule las integrales de línea propuestas en los ejemplos 1 y 2 aplicando el teorema de Green. En otros casos puede resultar más fácil calcular la integral doble sobre una región plana y el teorema de Green se emplea en sentido contrario.
- 1.11- Aplique el teorema de Green para encontrar una expresión que permita calcular el área de una región plana D limitada por una curva C suave, cerrada y simple.
- 1.12- Aplique el teorema de Green para encontrar una expresión que permita calcular el área de una región plana D limitada por una curva C suave, cerrada y simple.
- 1.13- Extienda el teorema de Green a una región la cual puede ser considerada como la unión de dos regiones simples (tipo I o tipo II) y luego a un caso más general considerando un número finito de regiones simples.
- 1.14- En el ejemplo 4 de la página 1072 se evalúa una integral de línea en la frontera de una región plana que no es una región simple, aplicando el teorema de Green. Observe cómo a través de cálculos sencillos se puede obtener el valor de esta integral aplicando el teorema de Green.
- 1.15- ¿Qué entiende por región simplemente conexa?
- 1.16- De ejemplos de regiones que no son simplemente conexas.
- 1.17- Extienda el enunciado del teorema de Green para regiones que no son simplemente conexas.
- 1.18- Expresé el enunciado del teorema de Green teniendo en cuenta la relación existente entre la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y)$ y las integrales de línea de sus funciones componentes.
- 1.19- Analice el ejemplo 5 de la página 1072 y observe como el teorema de Green permite calcular la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) / (x^2 + y^2)$. Sobre toda trayectoria cerrada y simple que encierra al origen.
- 1.20- Aplique el teorema de Green para demostrar el *teorema 6* de la página 1063.

2- Rotacional y Divergencia:

- 2.1- Defina *el rotacional* de un campo vectorial \mathbf{F} en \mathbf{R}^3 .
- 2.2- Expresé *el rotacional* de un campo vectorial usando el operador “del”.
- 2.3- Calcule el rotacional del campo vectorial definido en el ejemplo 1 de la página 1075.
- 2.4- Enuncie y demuestre el teorema (n° 3 - Pág. 1076) correspondiente al *rotacional del campo gradiente*.

- 2.5- Indique si el siguiente enunciado es verdadero o falso, justifique:
“ Si el rotacional de \mathbf{F} es distinto del vector nulo entonces F no es conservativo”.
- 2.6- Demuestre que el campo vectorial del ejemplo 2 de la página 1077 no es conservativo.
- 2.7- Bajo que condiciones se cumple el recíproco del teorema 3.
- 2.8- Demuestre que el campo vectorial del ejemplo 3 de la página 1077 es conservativo y encuentre la función potencial f .
- 2.9- ¿Qué información física brinda el rotacional de un campo de velocidades de un fluido?
- 2.10- Defina la *divergencia* de un campo vectorial \mathbf{F} en \mathbf{R}^3 .
- 2.11- Expresar la *divergencia* de un campo vectorial usando el operador “del”
- 2.12- Calcule la *divergencia* del campo vectorial definido en el ejemplo 4 de la página 1078.
- 2.13- Enuncie y demuestre el teorema (n° 11- Pág. 1078) correspondiente a la *divergencia del rotacional*.
- 2.14- Indique si el siguiente enunciado es verdadero o falso, justifique:
“ Si la *divergencia* de \mathbf{F} es distinta de cero entonces F no es el rotacional de algún campo vectorial \mathbf{G} ”.
- 2.15- Demuestre que el campo vectorial del ejemplo 5 de la Página 1079 no se puede escribir como el rotacional de otro campo vectorial.
- 2.16- ¿Qué información física brinda la *divergencia* de un campo de velocidades de un fluido?
- 2.17- Expresar en forma vectorial el teorema de Green.

Actividades para el coloquio

1- Teorema de Stokes:

- 1.1- Indique que tipo de integrales vincula el teorema de Stokes .
- 1.2- Bajo qué hipótesis es posible aplicarlo.
- 1.3- Explique en lenguaje coloquial el significado de la tesis del teorema de Stokes.
- 1.4- Expresar en lenguaje simbólico la tesis del teorema de Stokes.
- 1.5- Lectura complementaria: En el texto (página 1106) encontrará una demostración del teorema de Stokes para el caso particular en el que S es una gráfica y \mathbf{F} , S y C son suaves.
- 1.6- Bajo qué condiciones se cumple la siguiente igualdad:

$$\iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

- 1.7- El ejemplo 1 de la página 1107 muestra un caso en el cual el cálculo de una integral de superficie resulta más sencillo que el cálculo de una integral de línea. Calcule la integral de línea propuesta en el ejemplo 1 aplicando el teorema de Stokes.

2- Teorema de la Divergencia:

- 2.1- ¿Qué entiende por **regiones sólidas simples** en \mathbf{R}^3 ?
- 2.2- Indique que tipo de integrales vincula el *teorema de la divergencia*.
- 2.3- ¿Bajo qué hipótesis es posible aplicar el teorema de la divergencia?
- 2.4- Explique en lenguaje coloquial el significado de la tesis del teorema de la divergencia.
- 2.5- Expresar en lenguaje simbólico la tesis del teorema de la divergencia.

2.6- Exprese el teorema del Green en forma vectorial usando el concepto de *divergencia*. Relacione esta expresión con el teorema de la divergencia.

2.7- Lectura complementaria: En el texto (página 1112) encontrará una **demostración** del teorema de la divergencia. Lea detenidamente esta demostración y justifique cada paso. Note que el método de demostración es muy semejante al aplicado en el teorema de Green.

2.8- El ejemplo 1 de la página 1113 muestra un caso en el cual, el cálculo del flujo de un campo vectorial sobre una esfera unitaria, resulta más sencillo si se aplica el teorema de la divergencia, de manera que el flujo se obtiene mediante una integral triple. Lea el ejemplo y verifique los cálculos.

Problemas propuestos para la práctica (28 de Mayo)

Los **ejercicios enmarcados** deben ser resueltos, para ser presentados en la clase práctica. El objetivo de esta tarea es desarrollar en el estudiante una actitud reflexiva y una práctica de autoevaluación. A nosotros, como docentes, nos permite detectar dudas y en consecuencia actuar. Cada estudiante deberá llevar una carpeta de trabajo. En la misma se debe consignar: apellido y nombre, horario de la comisión de práctica a la que pertenece. Para cada problema se debe: anotar el enunciado, extraer del mismo los datos o información dada.

Al final de cada ejercicio se deberá responder el siguiente cuestionario:

- 1) ¿Qué conceptos nuevos o propiedades usé? ¿En qué sección y página del texto se encuentran?
- 2) ¿Qué conceptos de otros cursos apliqué?
- 3) ¿Encontré dificultades? ¿Cuáles? ¿Cómo intenté solucionarlas?
- 4) ¿Comprendí los conceptos que usé? ¿Puedo expresarlos? ¿Qué dudas quedan?

Sección 16.4. Ejercicios: $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{7}$, $\boxed{12}$, $\boxed{17}$, $\boxed{19}$.

Sección 16.5. Ejercicios: $\boxed{1}$, $\boxed{13}$, $\boxed{21}$

Sección 16.8. Ejercicios: $\boxed{3}$, $\boxed{9}$, $\boxed{13}$, $\boxed{17}$.

Sección 16.9. Ejercicios: $\boxed{3}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{10}$.

Guía N° 12: Teoría (Repaso- consulta).

Actividades para el coloquio de repaso 2 y 3 de junio

Discusión de los enunciados del tipo verdadero – falso:

capítulo 15: pág. 1035, capítulo 16: pág. 1119. Aplicaciones físicas de los teoremas de Stokes y la Divergencia

Guía N° 12: Problemas propuestos para la práctica de repaso (4 de junio)

Capítulo 15 sección repaso (página 1035): $\boxed{13}$, $\boxed{33}$, $\boxed{37}$

Capítulo 16 sección repaso (página 1119): $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{13}$, $\boxed{17}$, $\boxed{26(a)}$,
 $\boxed{29}$, $\boxed{33}$, $\boxed{35}$.