Matemática II: Guía Nº 10 - (Análisis Lineal)
Teoría - Coloquio y Práctica 27/10/08

Material didáctico elaborado por personal docente de la asignatura: Matemática II - PLAN 93

Unidad Didáctica: Transformada de Fourier .

Temario:

Relación entre la transformada de Fourier y Laplace. Respuesta en frecuencia. Señales de energía finita y de potencia finita. Espectro de energía. Transformada de Fourier de las funciones escalón e impulso. Transformada de Fourier de señales de potencia finita. Transformada de Fourier de la convolución. Convolución en el dominio de la frecuencia.

Objetivos:

Que el alumno logre:

- Establecer relaciones entre la transformada de Laplace y de Fourier.
- Distinguir señales de energía finita y señales de potencia finita.
- Comprender el significado de espectro de energía y aplicarlo en la resolución de problemas.
- Calcular las transformadas de Fourier de señales de potencia finita.
- Aplicar propiedades de la transformada de Fourier para encontrar la respuesta de un sistema LTI causal estable.

Libro de texto:

- JAMES, GLYN. MATEMATICAS AVANZADAS PARA INGENIERIA Editorial PEARSON EDUCACIÓN .Edición 2002.

Material auxiliar:

- Tabla de integrales y fórmulas.
- Software sugerido: MuPAD

Actividades:

- Leer cuidadosamente los objetivos a lograr, ya que estos indican la meta propuesta en esta unidad didáctica y es bueno tenerlos presentes cuando hemos completado el tema, ya que proporcionan una guía para realizar nuestra propia autoevaluación.
- Una lectura compresiva de las definiciones, enunciados y ejemplos desarrollados en las secciones indicadas del texto.
- Elaboración individual de las respuestas del cuestionario. Discusión grupal sobre procedimientos y resultados.
- Análisis crítico de los ejemplos. Realización de ejercicios y problemas.

1- Relación entre la transformada de Fourier y Laplace

(páginas: 382 - 384, James)

1.1- Defina transformada bilateral de Laplace.

1.2- Defina transformada unilateral de Laplace. ¿Qué extremo inferior de integración se considera en esta definición para calcular la transformada de la función impulso?.

1.3- Relacione la transformada bilateral de Laplace y la unilateral para una función causal.

1.4- Demuestre que si f(t) es causal entonces $\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{F}[f(t)\, e^{-\sigma t}]$ para cada σ en la región de convergencia de $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$.

1.5- Demuestre que si $f(t)$ es causal entonces $\mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{L}[f(t)]_{\sigma=0}$, siempre que la integral que define a F(s) sea convergente en $\sigma = 0$.

1.6- Revisión del concepto de **estabilidad**: Dado un sistema lineal invariante en el tiempo causal modelado por una ecuación diferencial $a_n x^{(n)}(t) + \ldots\ldots + a_0\, x(t) = f(t)$, la solución general de la EDO está dada por $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$, donde $x_c(t)$ es la solución general de la homogénea asociada y $x_p(t)$ es la solución particular de la no homogónea. Se dice que el sistema es estable si $x_c(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

i) Dado el sistema **LTI causal**, modelizado por: $a\, x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = f(t)$. Escriba la ecuación característica del homogéneo asociado y calcule $x_c(t)$ para los diferentes casos que se pueden presentar. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que el sistema sea estable?.

ii) Aplique transformada de Laplace para calcular la respuesta al impulso del sistema dado y modelizado por la EDO: $a\, x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = f(t)$. Analice los diferentes casos que se pueden presentar **considerando que el sistema es estable**. Indique en cada caso la región de convergencia de la función transferencia.

iii) Indique si el siguiente enunciado es verdadero o falso y justifique la respuesta.

" la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema **lineal invariante en el tiempo causal estable** modelizado por: $a\, x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = f(t)$ existe y está dada por $G(j\omega)$, siendo G(s) la función transferencia del mismo".

Nota: este enunciado se puede generalizar para un sistema **lineal invariante en el tiempo causal estable** modelizado por $a_n x^{(n)}(t) + \ldots\ldots + a_0\, x(t) = f(t)$.

1.7-Resuelva el problema planteado en el ejemplo 5.9 de la página 383 (James).

2- Respuesta en frecuencia.

(página 384, James)

2.1- Exprese el sen ωt como $(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/(2j)$ y aplique coeficientes indeterminados superposición para demostrar que la respuesta en estado estacionario del sistema modelizado por $a\, x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = A \operatorname{sen} \omega t$ está dada por $x_p(t) = A\,|G(j\omega)|\, \operatorname{sen}[\omega t + \arg(G(j\omega))]$

2.2- Defina función respuesta en frecuencia.

2.3- Si un sistema LTI causal estable está modelizado por $a\, x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = f(t)$, demuestre que en el dominio de la frecuencia la relación entrada salida puede expresarse:

$$X(j\omega) = G(j\omega)\, F(j\omega).$$

2.4- Teniendo en cuenta la definición del sistema en el dominio de la frecuencia obtenida en (2.3), exprese el espectro de amplitud y fase de la respuesta del sistema.

2.5- Encuentre el espectro continuo de amplitud de la salida producida por un sistema causal estable con función transferencia G(s) y entrada $f(t)$, ambas definidas en el ejemplo 5.10 de la página 385.

3- Energía y Potencia

(página 388, James).

3.1- Defina: energía asociada a una señal $f(t)$.

3.2- Encuentre una expresión para la energía total asociada a una señal en el dominio de la frecuencia (Teorema de Parseval).
3.3- ¿ Qué entiende por densidad de energía espectral?
3.4- Defina espectro de energía de la señal *f*(t).
3.5- Determine la densidad de energía espectral de las señales definidas en el ejemplo5.11 de la página 389.
3.6- Defina potencia promedio y potencia asociada a la señal *f*(t).
3.7- Defina señales de energía y señales de potencia.
3.8- Demuestre que la señal cos $\omega_0 t$ es una señal de potencia finita.

4- Transformada de Fourier de señales de potencia.

(página390, James)

4.1- Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes funciones y grafique los correspondientes espectros en el dominio frecuencia:
- i) $\delta(t)$
- ii) $\delta(t-t_0)$
- iii) 1
- iv) $\exp(j\omega_0 t)$
- v) $\cos \omega_0 t$
- vi) sen $\omega_0 t$

4.2- Resuelva los ejemplos 5.12,5.13,5.14 y 5.15 de las páginas 392-395 (James).
4.3- Un argumento diferente al del libro para encontrar la transformada de la función signo:
Se define la función signo como sgn(t) = 1 si t>0, sgn(t) = 0 si t = 0 , sgn(t) =-1 si t< 0.
- i) Compruebe que sgn(t) = 2 [H(t) –1/2], siendo H(t) la función de Heaviside.
- ii) Derivando y aplicando transformada de Fourier demuestre que la transformada de la función signo es $2/j\omega$.
- iii) Aplicando propiedad de linealidad de la transformada de Fourier en sgn(t) = 2 [H(t) –1/2] demuestre la transformada del escalón unitario es $\mathscr{F}\,[H(t)] = 1/j\omega + \pi\delta(\omega)$.

ACTIVIDADES PARA El COLOQUIO

5.- Convolución

(página 396 – 399, James)

5.1- Enuncie y demuestre el teorema de convolución en el tiempo.
5.2- Enuncie y demuestre el teorema de convolución en la frecuencia
5.3- Resuelva el ejercicio planteado en el ejemplo 5.16 de la página 398, el cual permite obtener la transformada de Fourier de una integral.

ACTIVIDADES PARA LA PRACTICA

Ejercicios propuestos para discutir en la clase:
- 5.4.3: 17, 18, 20 (página 374)
- 5.5.3: 22,23,27 (página 381)

Presentar: 5.4.3:17, 5.5.3:23