

Estudio por Elementos Finitos de un Modelo de Lubricación con Fluido No Newtoniano. Aplicación a la Rodilla y su Prótesis.

José Di Paolo¹ y Marcelo Berli²

¹ Profesor asociado de la Facultad de Ingeniería de la UNER.

² Estudiante avanzado de Bioingeniería de la UNER

Facultad de Ingeniería – UNER

CC 47, Suc. 3, 3100, Paraná, Entre Ríos

e-mail: ¹josedp@ceride.gov.ar y ²marceloberli@iespana.es

Resumen*: La articulación de la rodilla es fundamental para el movimiento y equilibrio del cuerpo humano. La misma posee un material poroso y elástico, capaz de exudar y absorber líquido sinovial que circula por el canal de lubricación formado entre las superficies en contacto: el cartílago articular.

Ante estados patológicos avanzados, esta articulación debe ser reemplazada por prótesis de rodilla. No obstante, estas últimas funcionan adecuadamente a lo sumo 15 años. Una de las principales causas de falla en estos implantes es el desgaste del polietileno del componente tibial debido, entre otros factores, al rozamiento que se produce entre las superficies artificiales en movimiento.

Modelos anteriores mostraron que la característica porosa del cartílago articular reduce el coeficiente de fricción, utilizando líquido sinovial de características newtonianas como lubricante. Estudios mecánicos ex vivo mostraron que el líquido sinovial tiene un comportamiento no newtoniano con características pseudoplásticas.

En este trabajo se resuelve un modelo de lubricación de la zona de contacto de una junta sinovial con sustrato poroso, lubricada con líquido de características no newtonianas trabajando en movimiento pleno, válido para rodilla natural y prótesis de rodilla.

Los resultados muestran que la característica no newtoniana del fluido sinovial acentúa el proceso de autolubricación del sustrato poroso, reduciendo aún más el coeficiente de fricción en rodillas naturales. Un modelo para prótesis de rodilla con dicho fluido, predice un mejor funcionamiento mecánico con reducción de la fricción en el componente tibial, el cual debería poseer baja rigidez para complementar el beneficio de la porosidad evitando el desgaste por abrasión.

Palabras claves: Prótesis de rodilla, elementos finitos, fluido no newtoniano, sustrato poroso, desgaste.

* Gran parte de estos resultados serán enviados en breve a la revista especializada THE KNEE de Elsevier.

1 INTRODUCCIÓN

La articulación sinovial de la rodilla cumple una función fundamental en la movilidad y estabilidad del cuerpo humano. Gracias al funcionamiento de la misma, un individuo puede desenvolverse con mayor facilidad en un ambiente social cada vez más exigente y a la vez no dependerá de otras personas para realizar las tareas básicas en el hogar o en su trabajo.

Cuando debido a la edad, a alguna patología (adquirida o congénita) o accidente, la articulación se desgasta o se destruye severamente, hay que recurrir a su reemplazo parcial o total para devolverle al paciente la movilidad que le permita seguir llevando su ritmo de vida habitual con un mínimo de restricciones. En la actualidad, esto se soluciona reemplazando la articulación dañada por una prótesis de rodilla, que consta de un componente femoral metálico y un componente tibial de base metálica y superficie polimérica (polietileno de ultra alta peso molecular).

No obstante, surge el inconveniente de que la vida útil de dichos reemplazos no supera los 15 años. En personas jóvenes y/o con un alto grado de actividad, esto puede devenir en nuevas intervenciones con padecimientos psico-físicos de importancia, con el agravante de que una prótesis desgastada y aflojada no siempre puede ser recambiada pues los resultados de una segunda operación no son tan buenos.

El desgaste del polietileno es considerado actualmente una de las principales causas de la falla de las prótesis de rodilla. Es fundamental entonces que se puedan desarrollar nuevos materiales u optimizar los ya existentes para que resulten mas resistentes al desgaste y que, por ende, las prótesis de las que forman parte sean más duraderas [1].

Una de las principales diferencias entre una rodilla natural y un reemplazo artificial es que la primera posee un tejido articular altamente especializado para el eficiente funcionamiento mecánico de la articulación: el cartilago articular. El mismo, es un material poroso con capacidad de exudar y absorber fluido sinovial ante estados de deformación, generando un mecanismo de autolubricación que contribuye a reducir los coeficientes de fricción, logrando valores muy pequeños (típicamente entre 0,005 y 0,0025 [2]).

Estudios numéricos anteriores sobre un modelo matemático de lubricación de rodilla [3,4,5] mostraron el beneficio de la característica porosa del cartílago articular en la reducción del coeficiente de fricción. En dicho modelo se consideró al líquido sinovial con características newtonianas, pero estudios mecánicos realizados sobre este fluido ex vivo mostraron que el mismo presenta un comportamiento no newtoniano, pudiendo ser modelado como ley de potencia [6,7].

En función de realizar un avance en el conocimiento de los factores mecánicos que llevan a un eficiente comportamiento mecánico de la rodilla para poder diseñar materiales mas duraderos, en este trabajo se realizará un estudio numérico por medio de la solución de un modelo matemático de lubricación de la rodilla en movimiento pleno y estado estacionario, incluyendo la característica no newtoniana del fluido sinovial, a través de una robusta técnica numérica basada en el método de elementos finitos y el método de Newton.

Luego, mediante la adaptación del modelo mencionado a una hipotética prótesis de rodilla en las mismas condiciones de funcionamiento que la rodilla natural, se realizan predicciones numéricas de los rangos de valores para los parámetros materiales de un sustrato poroso de baja rigidez adherido al componente tibial que tienda a reducir el rozamiento y por lo tanto a alargar la vida útil de las prótesis. El código computacional, de factura propia, puede ser ejecutado en computadoras personales actuales.

2 MODELO

De la observación anatómica de la rodilla natural y morfológica de las prótesis que la reemplazan, surgen las siguientes consideraciones que llevan al modelo geométrico general:

- La rodilla se encuentra suficientemente reforzada por los ligamentos, tendones y músculos que la rodean. Esto le confiere estabilidad y asegura que los elementos en contacto mantengan sus posiciones en pleno movimiento, reduciendo los grados de libertad a modelar. Es conocido que anatómicamente, el conjunto osteoartromuscular y ligamentario de la rodilla le permite tener principalmente un único grado de libertad, el de rotación en torno a un eje que pase aproximadamente por los cóndilos femorales, trabajando la rodilla como una bisagra .
- Las prótesis de rodilla tienen la misma forma que los elementos que reemplazan, por lo tanto las consideraciones del punto anterior se mantienen. Están construidas con un componente femoral metálico, de alto módulo elástico, y un componente tibial de superficie polimérica, con un módulo elástico tres órdenes de magnitud menor que el anterior. Gracias a estas características, en este trabajo se asumirá al primero como un material perfectamente rígido mientras que al segundo como un material elástico muy deformable.
- Debido a la pequeña curvatura de los elementos en la dirección axial de la zona de contacto, frente a las dimensiones de las prótesis, estos últimos se pueden modelar como dos cilindros en contacto longitudinal.
- La zona de contacto está lubricada por el líquido sinovial, por lo que existe un canal de lubricación.

La figura 1 muestra una vista lateral de los cilindros en un hipotético estado indeformado en el cual el componente femoral parece introducirse en el tibial una distancia $2H_0$ representando la acción de una carga W en dirección diametral, perpendicular al eje X .

En el caso de la rodilla natural, ambos componentes están recubiertos por una capa superficial de un sustrato elástico y poroso de espesor L (cartílago articular), capaz de exudar líquido intersticial por compactación. En cuanto a la prótesis de rodilla propuesta, se mantienen las dimensiones de los cilindros pero únicamente el componente tibial poseerá el recubrimiento de un sustrato poroso de baja rigidez.

El componente femoral se encuentra además realizando un movimiento de rotación sobre el componente tibial con una velocidad tangencial $2V$, representando el movimiento relativo pleno entre los elementos.

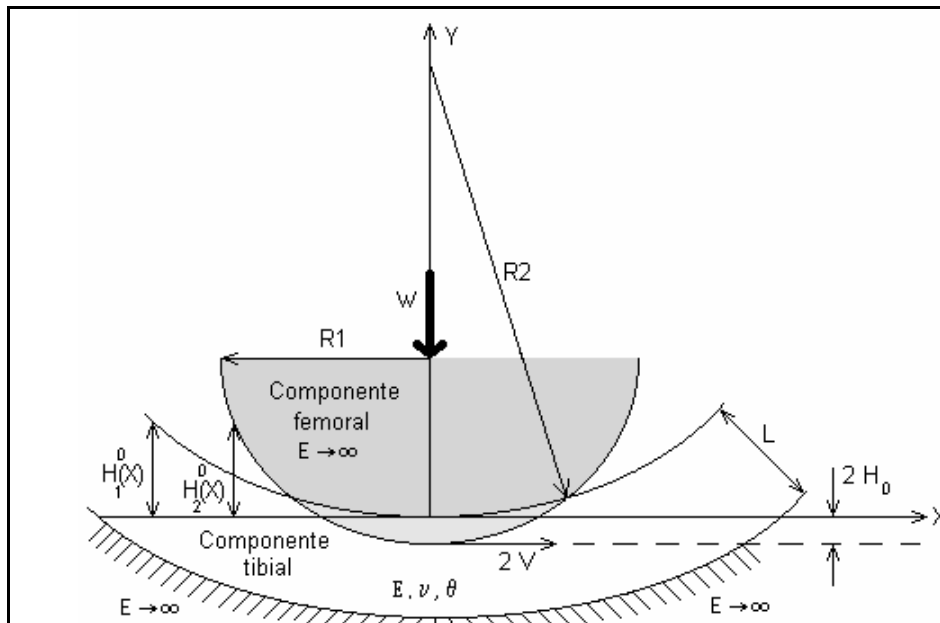


Figura 1: Representación simplificada de la región de contacto lubricado de una junta sinovial cargada en un hipotético estado indeformado.

Dadas las similitudes señaladas entre la rodilla natural y su prótesis, seguidamente se desarrollará un modelo genérico, cuya validez para cada articulación dependerá del valor de un determinado parámetro (α).

De la figura 1, surgen las ecuaciones de las superficies cilíndricas cuyo desarrollo puede verse en [8]. La geometría indeformada de los cilindros, en virtud de que la zona en estudio es mucho más pequeña que las dimensiones de la prótesis, queda descrita por la parábola más cercana al contorno de cada superficie en la zona central de contacto. La ecuación de la altura del canal de lubricación se obtuvo restando las curvas mencionadas, y sumando la deformación de el/los sustrato/s [9]. Esta ecuación es:

$$H(X) = -2H_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] X^2 + \alpha D(X).$$

donde $D(X)$ es la deformación de un sustrato. Para las prótesis de rodilla $\alpha=1$, mientras que para la rodilla natural, la deformación total es la suma de las deformaciones de los dos cartílagos articulares, (ambos idénticos), es decir que $\alpha=2$.

Definiendo $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] = \frac{1}{R}$, donde R es el radio equivalente, la ecuación anterior queda

$$H(X) = -2H_0 + \frac{1}{R} X^2 + \alpha D(X). \tag{1}$$

Definiendo las longitudes características en las direcciones X e Y como $(RL)^{1/2}$ y L respectivamente, la versión adimensional de la ecuación 1 queda:

$$h(x) = -2h_0 + x^2 + \alpha d(x), \quad (2)$$

El modelo del contacto entre los cóndilos responde a un estado de deformación plana [4,5]. En virtud de que el sustrato considerado en este trabajo (tanto para rodilla como para prótesis) tiene un espesor muy pequeño con respecto a la zona de carga, se puede utilizar la aproximación conocida como deformación unidimensional de columna, la cual expresa que la deformación local del sustrato depende únicamente de la presión local del fluido:

$$D(X) = \frac{P(X)}{E''} L \quad (3)$$

donde $E'' = (1-\nu)E / [(1+\nu)(1-2\nu)]$, siendo E y ν el módulo elástico y el coeficiente de Poisson del material respectivamente.

En variables adimensionales, la ecuación (3) se puede escribir:

$$d(x) = N_e p(x), \quad (4)$$

donde $N_e = \alpha \mu_0 V / L E'' (R / L)^{1/2}$ es un número adimensional que relaciona las fuerzas viscosas y las fuerzas elásticas del sistema y, como se dijo, α toma el valor 1 para prótesis de rodilla y el valor 2 para rodilla natural.

Mediante un estudio biomecánico de la marcha humana normal [10], puede deducirse que el período de estancamiento es el más exigente para la rodilla de la pierna que se encuentra en apoyo y por ende, el momento en que puede generarse mayor desgaste del sustrato. El mecanismo de lubricación reinante en esta fase es el elastohidrodinámico, donde se presenta el fenómeno de deformación del sustrato debido al campo de presiones desarrollado en el fluido sinovial que es arrastrado hacia la zona de contacto por el movimiento relativo entre las superficies. De esta manera se genera un campo de presiones en el fluido yacente en el canal de lubricación que aleja las superficies de la junta evitando el contacto directo de los sólidos.

Debido a que los sustratos considerados en este modelo aportan fluido desde sus poros, el mecanismo de lubricación mencionado recibe la denominación de poro-elastohidrodinámico [3].

El fluido arrastrado por las superficies articulares durante su movimiento, adquiere dentro del canal lubricante un perfil de velocidades Couette (perfil que varía linealmente a lo largo de la altura del canal). En la zona del contacto, la aparición de gradientes de presión dentro del fluido, superpone al flujo principal de Couette, un perfil de velocidades de Poiseuille (parabólico) cuando el fluido es newtoniano. En cada posición del canal, el perfil de velocidades posee entonces una parte lineal y una parabólica.

En el caso en análisis, el flujo del fluido no newtoniano, tendrá una componente de flujo principal y otra componente que se piensa como una perturbación de dicho flujo principal. A través del método de las velocidades perturbadas [11] (ver apéndice) junto con la aproximación de lubricación válida debido a la pequeña curvatura de las superficies en la zona de contacto, se obtiene la ecuación de lubricación de Reynolds modificada para una junta lubricada con fluido sinovial no newtoniano en movimiento pleno y estado estacionario. Esta ecuación en forma integral es:

$$P(X) = 12n\mu_0 \int_{-\infty}^x \left[\frac{H(-\infty)}{H} \right]^{n-1} \frac{VH - Q_e}{H^3} dx$$

Definiendo la presión característica como $P_c = (\mu_0 V / L)(R/L)^{1/2} 10^5$, la ecuación anterior quedará en forma adimensional de la siguiente manera:

$$p(x) = 12 \times 10^{-5} n \int_{-b}^x \mu \frac{h - 2q_e}{h^3} dx \quad (5)$$

$\mu = \left(\frac{h(-\infty)}{h(x)} \right)^{n-1}$ es la viscosidad equivalente promediada en forma adimensional

que surge del modelo de ley de potencia para el fluido sinovial, mientras que n es el exponente adimensional de la ley de potencia, valor que puede oscilar entre 0,0 y 1,0 y puede ser tomado como un parámetro. $h(-\infty)$ simboliza la altura del canal al comienzo en un punto alejado del centro del contacto.

Debido al término h^{-3} en la ecuación (5) la presión tendrá valores elevados en las zonas donde el canal es estrecho (zona de contacto). Por el contrario, en los extremos del dominio donde la altura del canal es grande la presión baja a los valores ambientales. Esta presión ambiente será tomada como presión de referencia y considerada cero.

Para evitar que en los resultados aparezcan presiones subambientales espúreas, se adoptan las llamadas condiciones de contorno de Reynolds: a la entrada del contacto, donde el canal de flujo es convergente, la presión toma el valor de referencia lejos de la línea de centros ($x \rightarrow -\infty$) y, a la salida del contacto, donde el canal es divergente, la presión se anula en un punto cuya ubicación \bar{x} se desconoce. Asimismo, a la salida del contacto, la presión se reduce suavemente hacia el valor ambiental para satisfacer el balance de masa en dicha región. En suma, las condiciones de contorno que cumple la distribución de presión son:

$$\begin{aligned} x = -b, \quad p &= 0 \\ x = \bar{x}, \quad p &= dp / dx = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Donde b es el infinito físico; $b=B/(RL)^{1/2}$ y B es igual a 1,5 veces el semiancho del contacto hertziano [9]. Valores de B mayores no implican cambios en los resultados.

La determinación de la ubicación de \bar{x} involucra una incógnita adicional que se resuelve a través de la condición de gradiente de presión nulo a la salida del canal. Esta condición introducida en la derivada de (5) permite escribir:

$$h|_{\bar{x}} = 2q_e|_{\bar{x}} \quad (7)$$

En forma análoga, la condición de presión nula, introducida en la ecuación (5), permite obtener una ecuación para el caudal de entrada $Q_e(-B)$:

$$0 = \int_{-b}^{\bar{x}} \left[\frac{h(-b)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{h - 2q_e}{h^3} dx$$

Como ya se ha expuesto, la lubricación de las articulaciones diartrodiales se realiza mediante la formación de una capa de fluido entre las dos superficies. Dicho fluido proviene de dos fuentes: una es fluido sinovial secretado por la membrana sinovial y arrastrado hacia la zona de contacto por el movimiento de las superficies articulares; la otra es fluido intersticial de composición similar al sinovial que es exudado por el cartílago debido a la deformación que éste experimenta cuando se lo somete a una carga.

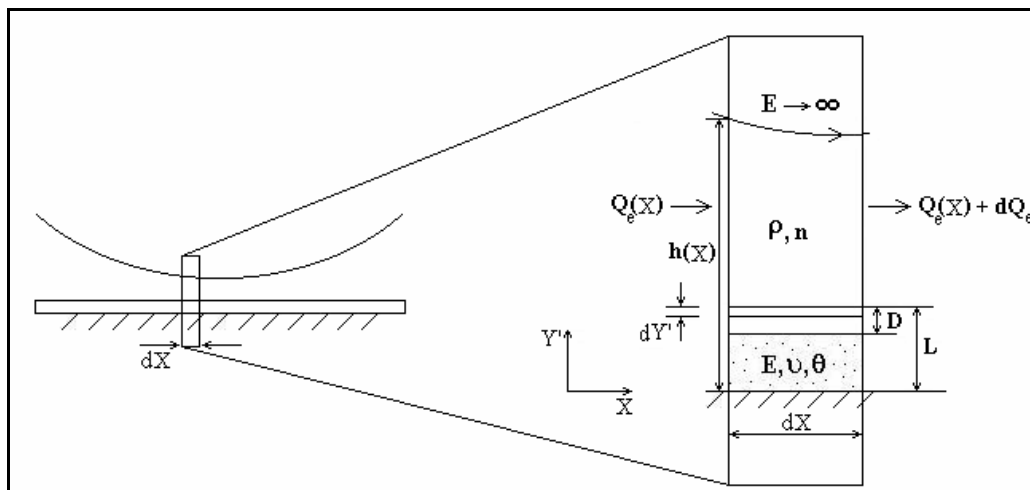


Figura 2: Representación del aporte de fluido al caudal circulante en una pequeña porción del dominio. El ancho en la dirección axial es unitario.

La figura 2 representa la configuración equivalente del modelo geométrico, de la cual surge la ecuación (1). Por lo tanto, el siguiente desarrollo es válido tanto para rodilla natural como para prótesis de rodilla.

Como se puede ver en la figura 2, entre dos secciones cualesquiera distanciadas un dX , el caudal entrante y saliente difieren en lo agregado o absorbido por el sustrato debido a la compactación o expansión sufrida por las variaciones de presión. Como no hay flujo transversal (dirección perpendicular a la hoja), el caudal solo depende de X . Para establecer esta dependencia, se analiza el balance de masa entre dos secciones del canal muy próximas una de otra. La diferencia de caudal entre estas secciones, es el caudal aportado o absorbido por la deformación del sustrato en el tiempo (T) en que las partículas de fluido traspasan ambas secciones; es decir:

$$dQ_e = dY' \frac{dX}{dT} \theta = 2V\theta dY' \quad (8)$$

donde $2V = dX/dT$ y θ es el denominado factor de exudación, que expresa la relación entre el volumen de fluido exudado y el volumen total deformado del sustrato. θ guarda una relación directa pero desconocida con la porosidad y podrá medirse experimentalmente a través de convenientes ensayos de compactación. Su utilización como parámetro en el algoritmo, permite encontrar su valor más recomendable para el mejor funcionamiento de una prótesis.

Integrando miembro a miembro la ecuación (8), se tiene:

$$\int_{Q_e(-B)}^{Q_e(X)} dQ_e = 2V\theta \int_{L-D}^L dY'$$

donde $(-B)$, ya definido, es una posición suficientemente alejada de la entrada del canal.

Por último, el caudal de fluido en cada posición del canal es:

$$Q_e(X) = Q_e(-B) + 2V\theta D(X) \quad (9)$$

La ecuación (9) muestra explícitamente la influencia del sustrato poroso sobre el caudal circulante entre las superficies articulares. Puede observarse que en el caso de un material no poroso, el valor del coeficiente de exudación sería cero y el caudal resultaría constante en todo el dominio considerado. Sin embargo, la existencia del sustrato permeable poroso genera un caudal variable dependiendo de la deformación del cartílago, confirmando teóricamente la hipótesis del mecanismo de autolubricación en juntas con dichos materiales.

Definiendo el caudal característico como $Q_c = 2V L$, surge la expresión adimensional de la ecuación (9), la cual es:

$$q_e(x) = q_e(-b) + \frac{1}{\alpha} \theta d(x). \quad (10)$$

La carga de contacto que recibe la junta en la marcha normal, puede llegar a triplicar el peso corporal debido a que las fuerzas sobre la rodilla son casi siempre excéntricas en relación al centro de gravedad del cuerpo [2]. La mayor parte de la carga es creada por contracción de los músculos, los cuales producen la apertura de la articulación en movimiento. Esta carga es contrarrestada por la presión generada en el fluido sinovial. En forma adimensional, se puede expresar como:

$$w = \int_{-b}^{\bar{x}} p(x) dx. \quad (10)$$

Las fuerzas tangenciales de fricción $f_{1,2}$, por unidad de longitud axial en cada una de las superficies articulares, están dadas por la integral del esfuerzo cortante τ_{yx} en toda la extensión del contacto. En forma adimensional, se tiene:

$$f_{1,2} = \int_{-b}^{\bar{x}} \tau_{1,2} dx$$

donde los subíndices 1 y 2 significan la fuerza de fricción sobre la superficie tibial y femoral respectivamente.

En virtud de la pequeña curvatura de las superficies, el esfuerzo cortante se determina aproximando el canal en cada posición como dos pequeñas placas paralelas separadas por una distancia igual a la altura local del canal [8]. En forma adimensional:

$$\tau_{1,2} = \mp \frac{1}{2} N_{FR} \left[\frac{h(-b)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{h - 2q_e}{h^2} - \left[\frac{h(-b)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{2N_{FD}}{h} \quad (11)$$

donde $N_{FR} = 12 (L/R)^{1/2} 10^{-5}$ y $N_{FD} = N_{FR}/12$

Por último, se define el factor de fricción ϕ en cada superficie articular como el cociente entre la fuerza de fricción y la carga actuante sobre el contacto, es decir:

$$\phi_{1,2} = \frac{f_{1,2}}{w} \quad (12)$$

3 METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

La solución numérica de las ecuaciones del modelo presentan cierto grado de complejidad debido a :

- El fuerte acoplamiento que existe entre la ecuación de Reynolds y la deformación del sustrato.
- La indeterminación a priori de la frontera libre, lo cual implica el desconocimiento del dominio en el cual deben resolverse numéricamente las ecuaciones.
- La no linealidad de la ecuación de Reynolds.

En este trabajo se utilizó una robusta técnica computacional basada en [3,4,9]:

1. Discretización de las ecuaciones por el método de elementos Finitos y los residuos ponderados de Galerkin.
2. Solución simultánea de las ecuaciones por medio del método de Newton, involucrando en cada iteración la determinación del dominio del problema (ubicación de la frontera libre).
3. Discretización adaptable en función de cada nueva posición de la frontera libre \bar{x} y de una distribución nodal inicial.
4. Continuación paramétrica con control del paso del parámetro utilizado.

El método de elementos finitos (MEF) tiene por objeto transformar el sistema de ecuaciones diferenciales, integrales o integrodiferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas que pueden resolverse computacionalmente, donde las incógnitas de las mismas son los valores de las variables del sistema original en puntos seleccionados del dominio espacial denominados *nodos*. Para ello, el dominio donde se definen las ecuaciones originales, es dividido en porciones colindantes denominados *elementos* en los cuales se aproximan las funciones incógnitas por medio de funciones de aproximación polinómicas conocidas [9].

El manejo de la frontera libre \bar{x} y la adaptabilidad de la discretización nodal en función de ella, consiste en una implementación unidimensional del método de

los spines creado para la localización de superficies libres. En este caso, los nodos cuya posición se varía en cada iteración, son los que se encuentran desde el centro del dominio hasta la frontera libre mientras que los restantes se mantienen fijos. La metodología de solución descrita fue también empleada en [3,4,5].

Los resultados que se presentan fueron obtenidos en una PC Pentium II de 233 MHz con 256 Mb de RAM para una distribución nodal compuesta por 140 nodos convenientemente dispuestos. El tiempo de cómputo es de aproximadamente 5 segundos por iteración, requiriéndose para cada convergencia entre 3 y 5 iteraciones de Newton para cada valor del parámetro de continuación. La obtención de los resultados mostrados insumió un total cercano a 200 modificaciones de los parámetros.

La ejecución del código se realizó para un conjunto de constantes físicas y operativas de una rodilla humana y de una prótesis de rodilla, las cuales se presentan en la Tabla I. Para rodilla natural, se siguió un proceso de continuación paramétrica en tres de los parámetros del sistema: la carga, el factor de exudación y el exponente de la viscosidad equivalente promediada. Para prótesis de rodilla, se realizó continuación paramétrica para cuatro parámetros, o sea que además de los nombrados anteriormente, también se varió el número elástico N_e para estudiar el efecto de materiales con distintos módulos elásticos.

Denominación	Símbolo	Rodilla Natural	Prótesis de Rodilla
Radio del cilindro equivalente	R	0,700 m	0,700 m
Velocidad tangencial media de las superficies en contacto	V	$1,91 \times 10^{-2}$ m/s	$1,91 \times 10^{-2}$ m/s
Viscosidad a la entrada del canal	$\mu(-B) = \mu_o$	1,00 Pa s	1,00 Pa s
Módulo elástico del sustrato poroso	E	$1,6 \times 10^7$ Pa	$2,0 \times 10^7$ Pa a $5,0 \times 10^8$ Pa
Exponente de viscosidad del fluido lubricante	N	1,00 a 0,60	1,00 a 0,40
Coefficiente de exudación del sustrato	θ	0,00 a 1,00	0,00 a 1,00
Coefficiente de Poisson del sustrato poroso	ν	0,40	0,40
Espesor del sustrato poroso	L	$1,2 \times 10^{-3}$ m	$1,00 \times 10^{-3}$ m
Posición de ingreso a la zona de contacto lubricado	$-B$	$-3,97 \times 10^{-2}$ m	$-3,97 \times 10^{-2}$ m
Carga sobre el contacto	W	$1,15 \times 10^4$ N/m	$7,36 \times 10^4$ N/m

Tabla I: Parámetros físicos y operativos de una articulación de rodilla natural y su prótesis.

4 RESULTADOS

4-1 Validación del modelo.

El modelo planteado ha sido validado con las mediciones del coeficiente de fricción realizadas por Bennett y Higginson [12], sobre un mecanismo lubricado en condiciones elastohidrodinámicas compuesto por un cilindro rígido giratorio

sobre un sustrato plano de baja rigidez. Para cada medición, el cilindro fue mantenido en contacto lineal sobre el sustrato, sometido a una carga de $1,75 \times 10^3 \text{ N/m}$ y velocidad angular constante. El lubricante empleado en la experiencia fue aceite de viscosidad $\mu = 0,10 \text{ Pa.s}$ (fluido de características newtonianas) y el sustrato utilizado, un polímero no poroso de $1,27 \text{ mm}$ de espesor y de módulo elástico $E=48,0 \text{ MPa}$.

En la figura 3 se muestran los resultados de este trabajo superpuestos a los resultados experimentales. Puede verse la aceptable concordancia de los mismos, siendo notable la aptitud del algoritmo para arrojar resultados en todo el rango de velocidades tangenciales del rodillo.

En la zona de muy bajas velocidades tangenciales el canal de flujo de lubricante es delgado, permitiendo el contacto sólido-sólido entre las asperezas del rodillo y el sustrato del equipo de experimentación, que da lugar a una alta fricción. Como el modelo no contempla esta situación, las curvas se separan en esta zona.

Para velocidades tangenciales elevadas, las mediciones están por encima de los resultados teóricos. Las diferencias encontradas pueden deberse a que el mecanismo real posiblemente no cumpla estrictamente con las hipótesis simplificadoras establecidas. Las juntas sinoviales trabajan en la zona de bajas velocidades y altas cargas.

Los resultados satisfactorios que surgen de validar el modelo con mediciones reales, proporcionan el suficiente respaldo para confiar en los resultados. Las conclusiones que se obtendrán de los mismos serán válidas fundamentalmente desde el punto de vista cualitativo, debido a que falta la comprobación experimental en el caso de sustratos porosos y fluido no newtoniano.

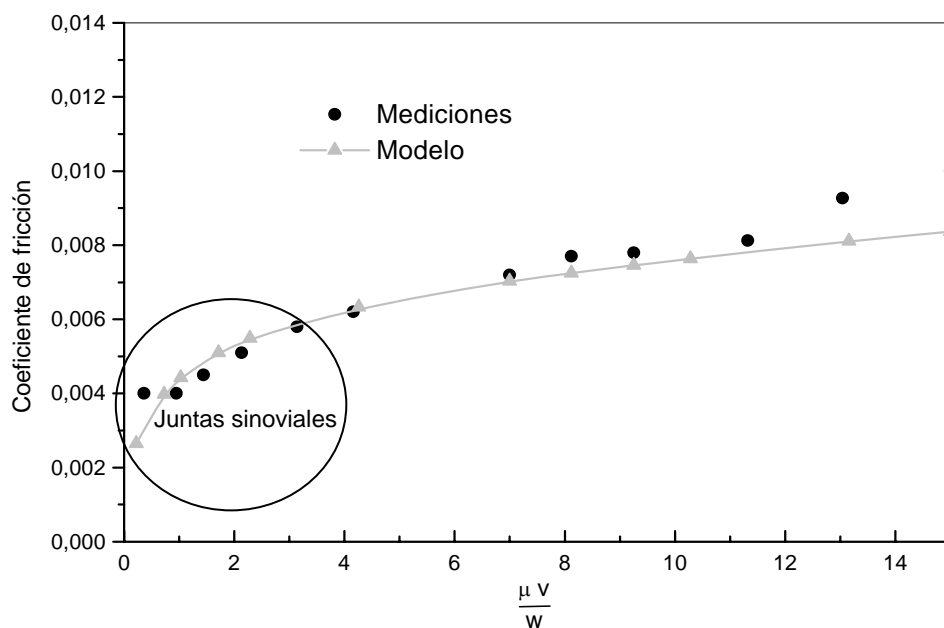


Figura (3): Validación de las predicciones del modelo con los resultados experimentales de Bennet y Higginson [12].

4-2 Influencia de la característica no newtoniana del líquido sinovial en articulaciones humanas naturales ($\alpha=2$).

Resultados previos a este trabajo, correspondientes a un modelo con lubricante newtoniano, indicaron que el factor de exudación es un parámetro de fundamental importancia para el buen funcionamiento de la articulación debido a que promueve un efecto de autolubricación del contacto al minimizar el caudal neto externo que debe ingresar y egresar del canal de flujo. Asimismo, este fenómeno, va acompañado de la reducción del coeficiente de fricción respecto a un hipotético cartílago no poroso. Estas dos características parecen explicar la escasa fricción y el exiguo desgaste que manifiestan las articulaciones.

El análisis que aquí se presenta involucrando la pseudoplasticidad del fluido sinovial refuerza esta idea debido a que, como se verá mas adelante, dicha característica acentúa aún más la autolubricación y el descenso del factor de fricción.

La carga de $1,15 \times 10^4$ N/m corresponde a uno de los dos contactos entre cóndilo y plateau tibial de cada rodilla. Si se estipula una longitud axial para el contacto igual al ancho de la curva de presión (aproximadamente 0,016 m), la carga total corresponderá a una persona de unos 730 N de peso.

Los resultados se obtuvieron con la siguiente secuencia: se establecieron los parámetros para sólidos no porosos ($\theta = 0,0$) y fluido newtoniano ($n = 1,0$) y se obtuvo un primer resultado para una carga muy baja ($\approx 0,0$), donde las presiones y las deformaciones pudieron inicializarse con ceros; de allí y por continuación paramétrica se fue aumentando la carga hasta alcanzar el valor adimensional de 0,01, luego, manteniendo constante dicho valor de carga se realizó continuación paramétrica en el parámetro θ hasta el valor 0,1 y por último, con la carga y θ constantes se obtuvieron resultados por continuación paramétrica en n hasta el valor límite más allá del cual el código deja de converger. Este último proceso de modificación de n fue realizado para dos valores distintos de θ : 0,05 y 0,1.

La figura 4 muestra como varía el campo de presiones producido en el fluido para $\theta = 0,1$ y tres valores del exponente n : 1,0, 0,9 y 0,8. La distribución de presión, a medida que disminuye n , va tomando la forma de semi-elipse correspondiente al contacto seco o hertziano, debido a que el fluido se va haciendo cada vez menos viscoso y para $n = 0,8$, el régimen ya es de cargas elevadas [8]. Se nota el aumento de las presiones máximas durante este mismo proceso que llega a un 2,4%, lo cual indica mayores deformaciones y por ende mayor actividad de los cartílagos en cuanto a la exudación y absorción de fluido.

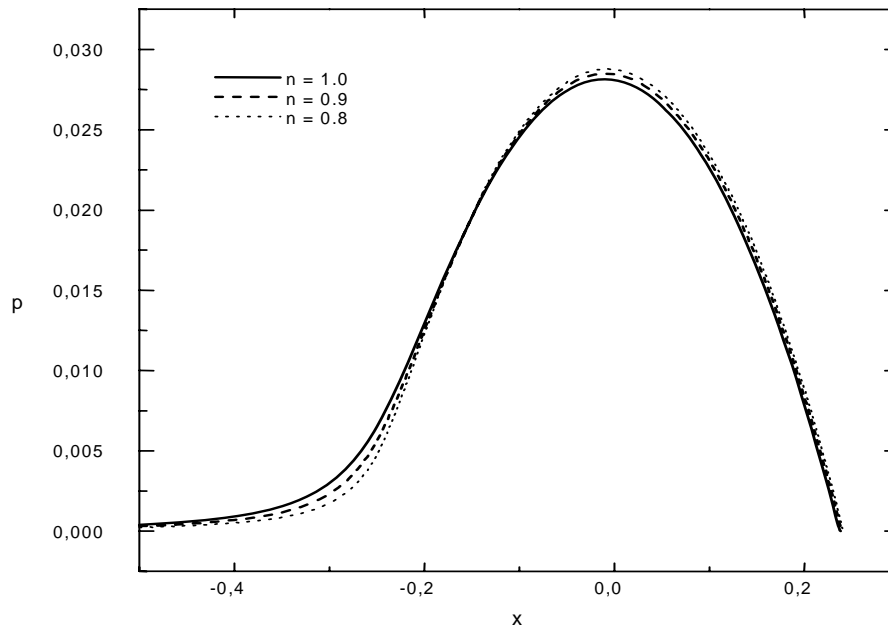


Figura 4: Distribuciones de presión según el modelo de rodilla natural para distintos valores de n .

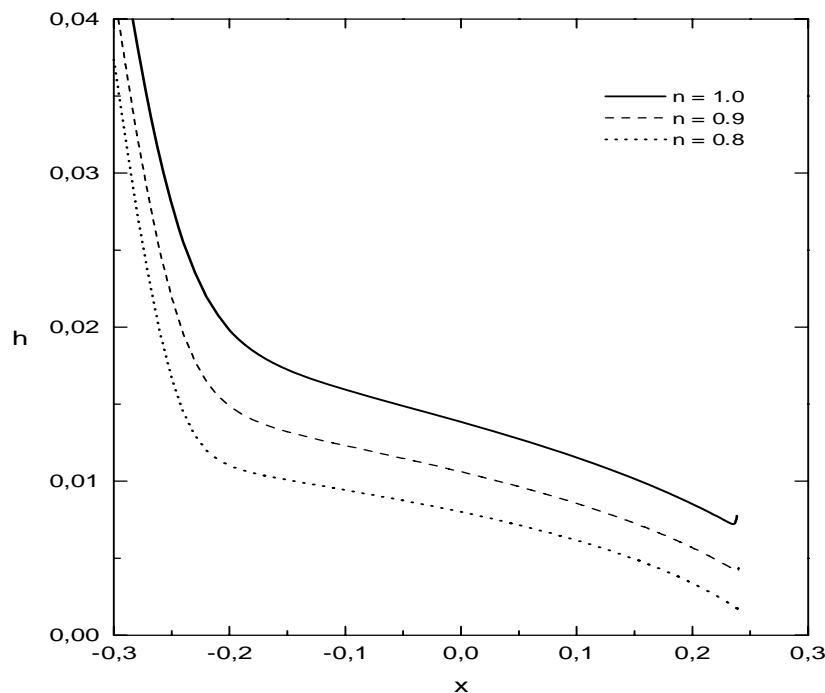


Figura 5: Variación del canal de lubricación para rodilla natural en función de n .

Las formas del canal en correspondencia a las presiones de la figura 4, pueden verse en la figura 5. La forma de cuña del canal de flujo en la zona de altas presiones, produce aumentos de los gradientes de velocidad en la dirección transversal al flujo y por lo tanto adelgazamiento (menor viscosidad) del fluido, adelgazamiento que es mayor cuanto menor es n . Como la carga permanece constante frente a la variación de n , ante una disminución de la viscosidad en todo el contacto, el canal se estrecha en todos los puntos como compensación, ya que la presión es directamente proporcional a la viscosidad e inversamente proporcional al cubo de la altura del canal (ver ec.(5)). Por ejemplo, en el centro

del contacto ($x = 0,0$) desde $n = 1,0$ a $n = 0,8$, el canal se ha reducido un 40%. Las pequeñas alturas del canal en la sección de salida, son necesarias para la satisfacción del balance total de masa del fluido lubricante: el que circula por el canal y el que llevan convectivamente los cartílagos.

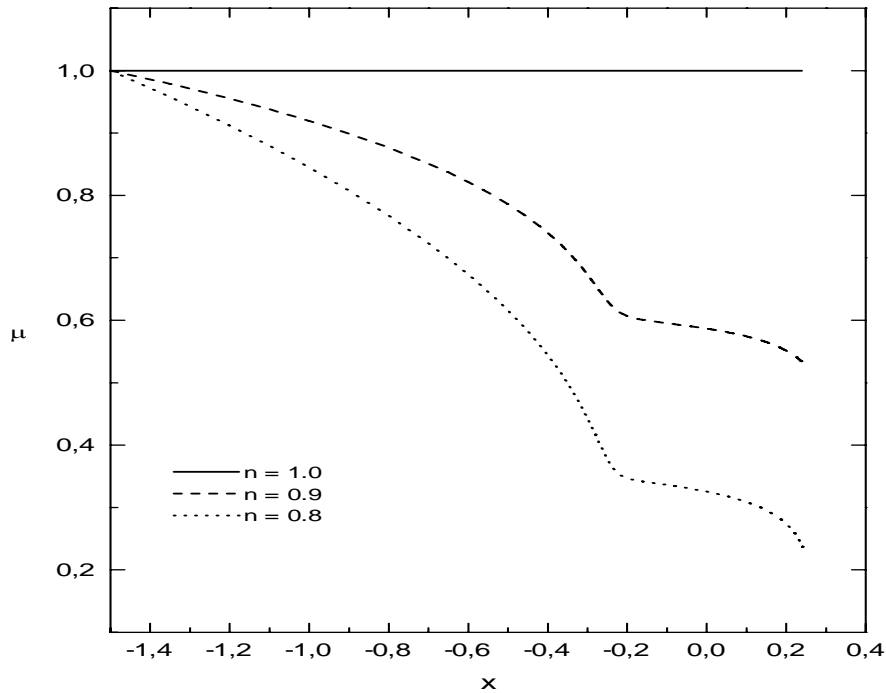


Figura 6: Variación de la viscosidad en los canales de flujo de la figura 5.

En la figura 6 se ve la disminución de la viscosidad equivalente promediada a lo largo del flujo, en relación directa a la disminución monótona del canal hasta el final del contacto, para los tres valores de n elegidos. Para $n = 0,8$, la viscosidad a la salida del contacto es del orden del 24% de la viscosidad ambiental (1,0 Pa s) tomada en la sección de entrada al canal; ello permite inferir que a pesar de los elevados gradientes de velocidad en la estrecha sección de salida, las tensiones cortantes en el fluido y por lo tanto la fricción sobre los sólidos mantienen bajos valores.

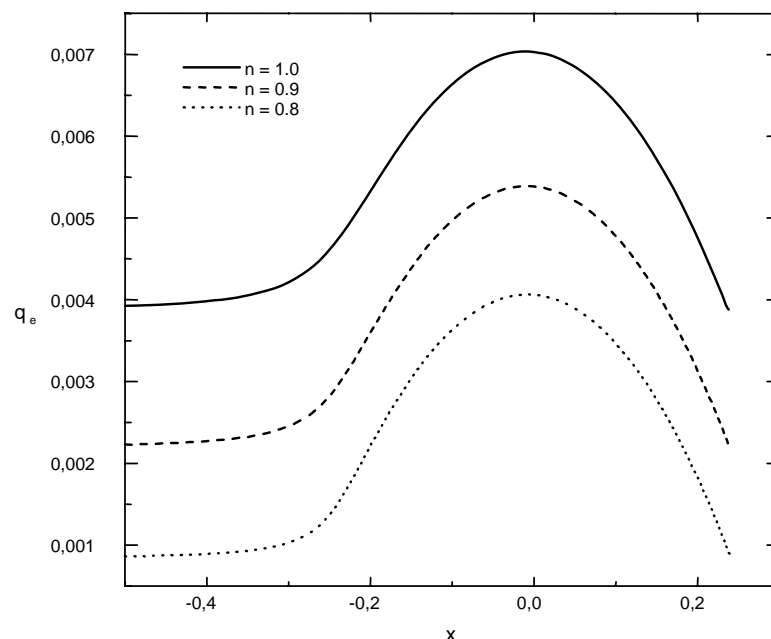


Figura 7: Distribuciones del caudal circulante por los canales de la figura 5.

Los caudales circulantes en cada sección del canal se muestran en la figura 7. Respecto al resultado correspondiente a $n = 1,0$, para $n = 0,8$ el caudal neto de entrada se redujo en un 77% mientras que la diferencia entre el caudal máximo y el caudal de entrada para cada n , pasó de un 82% a un 412%, evidenciando la total magnificación del mecanismo de autolubricación.

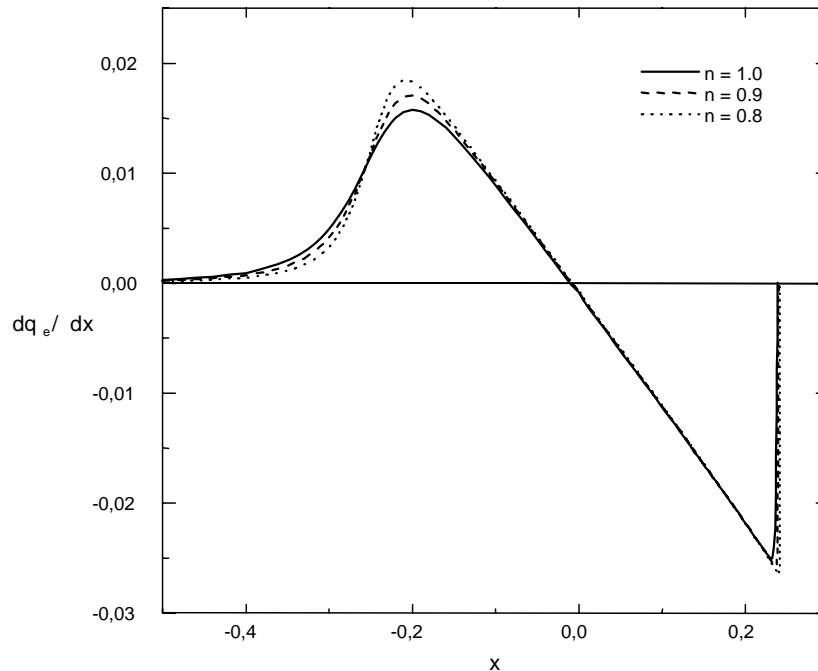


Figura 8: Patrones de exudación-imbibición correspondiente a los caudales de la figura 7.

La figura 8 muestra las pendientes de las curvas de la figura 7 que corresponden a los patrones de exudación-absorción de fluido a lo largo del contacto. Cuando n disminuye aumenta la cantidad de fluido exudado durante el tramo de crecimiento de la presión (hasta $x=0,0$), donde los cartílagos son comprimidos, este fluido luego es absorbido en la zona de descompresión (entre $x=0,0$ y $x=\bar{x}$) donde los cartílagos se expanden respecto a su máxima compresión experimentada alrededor de la línea de centros.

La variación de los coeficientes de fricción en función de n para dos valores de porosidad (0,05 y 0,10) se presenta en la figura 9. En ella puede verse cómo los factores de fricción disminuyen conforme disminuye n para una determinada porosidad, es decir al pasar de un fluido newtoniano a un fluido cada vez más pseudoplástico.

De esta manera se evidencia el papel fundamental de la característica no newtoniana del líquido sinovial en el eficiente funcionamiento mecánico de la rodilla natural. Algunos modelos de juntas sinoviales y máquinas de ensayo para prótesis, obtienen sus resultados de juntas inmersas en un líquido con características newtonianas. Esto puede devenir en errores importantes debido a que, como se vió en las sucesivas curvas, las variables mecánicas sufren importantes cambios con líquidos de diferente grado de pseudoplasticidad.

En función de aplicar estos resultados al desarrollo de materiales más eficientes para prótesis de rodilla, se estudiará el comportamiento mecánico de una prótesis de rodilla con un sustrato poroso inmersa en líquido sinovial no newtoniano, trabajando en estado estacionario durante una de las partes más exigentes de la marcha normal.

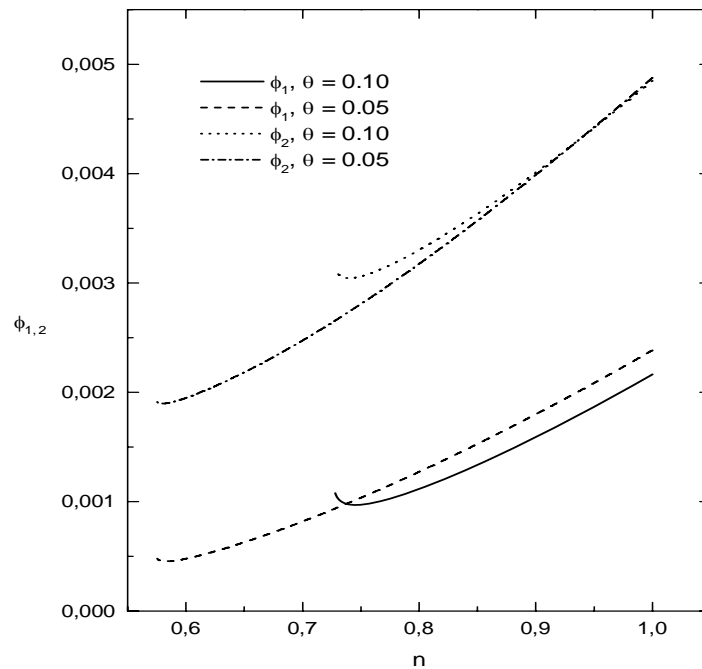


Figura 9: Coeficientes de fricción para dos valores del factor de exudación.

4.3 Predicciones para un polímero poroso de baja rigidez para prótesis de rodilla ($\alpha=1$)

Desde el punto de vista mecánico, existen básicamente dos medios a través de los cuales puede producirse desgaste por rozamiento en el componente tibial de las prótesis de rodilla: *la abrasión* y *los esfuerzos cortantes* del fluido sinovial sobre la superficie polimérica..

El *desgaste abrasivo* ocurre entre dos superficies con diferente dureza relativa. Mediante este mecanismo, cuando la separación entre las superficies en movimiento es menor que el tamaño de las rugosidades del polietileno y las asperezas del metal, estas últimas, al ser más duras, generan un desprendimiento de partículas del polímero en la zona de contacto, generando elevados coeficientes de fricción como se mostró en las mediciones de la figura 3 (zona de muy bajas velocidades).

Los esfuerzos cortantes contribuyen al fenómeno de desgaste debido a que las fuerzas tangenciales que se producen sobre la superficie polimérica en movimiento pueden promover un proceso de fatiga y generar su delaminación. Por otra parte, existe la posibilidad de que la carga y la fricción de la articulación produzcan fallas de adhesión en la interfase hueso-metal.

Si bien la solución de las ecuaciones adimensionales puede representar varias situaciones dimensionales, en razón de que la geometría y el movimiento de la

prótesis están bastante acotados, para su mejor interpretación los resultados para los parámetros de la Tabla I serán presentados con dimensiones.

Los resultados han sido obtenidos para una carga igual a tres veces el peso del individuo de 735N [10]. Se ha considerado que la carga se divide en cada uno de los cóndilos de la prótesis y se ha estipulado para ellos, una longitud axial igual al ancho de la curva de presión ($\approx 0,015 m$).

Debido al comportamiento no newtoniano del fluido sinovial, debe conocerse el valor de n más representativo del mismo. Se han reportado valores de $n = 0,40$ correspondientes a mediciones ex vivo pero se carece de mediciones in vivo, situación donde es posible que el valor de n pueda variar por factores físicos o biológicos. Para la obtención de los resultados hemos considerado un valor mínimo de $n = 0,60$, mas allá del cual los resultados (espesores de lubricante menores a $0,10 \mu m$) pueden apartarse del rango de validez de las hipótesis de los medios continuos, que dan sustento al modelo propuesto en este trabajo.

En la figura 10 se ilustran canales de lubricación para sustratos no porosos, con fluido newtoniano y no newtoniano para $n = 0,60$ y para cuatro módulos elásticos distintos.

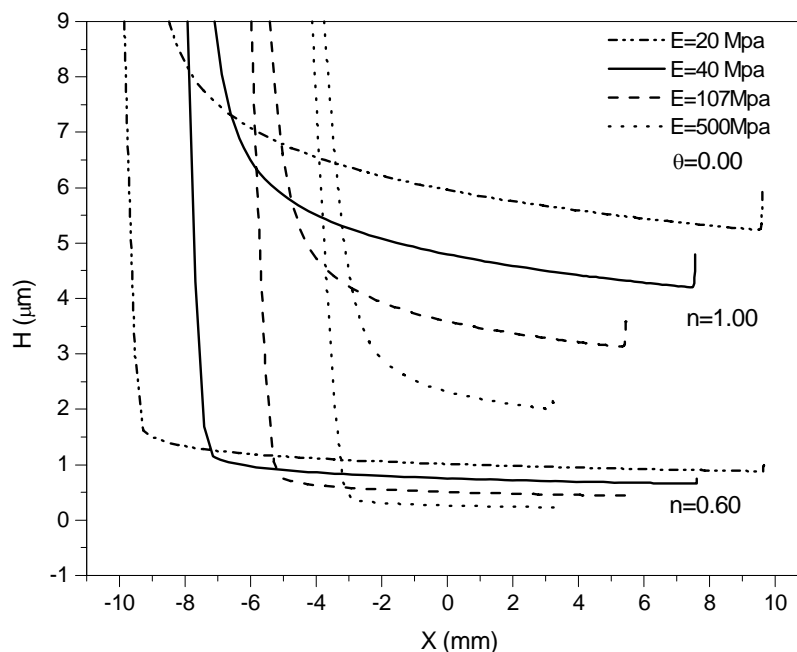


Figura 10: Separación entre las superficie o altura del canal para sustratos no porosos de distintos módulos elásticos correspondiente al modelo de prótesis.

Es significativa la disminución del canal con el aumento del módulo elástico, lo cual se potencia a medida que el coeficiente de viscosidad disminuye. Por ejemplo, entre las alturas de canal mínimas correspondientes a $E = 20,0 MPa$ y $E = 500 MPa$, se produce una reducción de un 62 % cuando $n = 1,0$ y a un 80 % cuando $n = 0,60$, con el agravante de que para el segundo caso, los componentes de las prótesis con sustratos más rígidos se encontrarían separados por una distancia inferior a la suma de las propias rugosidades superficiales de los componentes de la misma. Los modelos y experiencias que utilizan un fluido newtoniano, podrían obtener valores de rozamiento menores a los que se producen en condiciones fisiológicas.

En el polietileno de las prótesis actuales, se pueden lograr rugosidades que varían en el rango de $0,20$ a $0,36 \mu\text{m}$, mientras que para el metal, las rugosidades son de alrededor de $0,02 \mu\text{m}$ [13]. Si bien el modelo no contempla la rugosidad superficial, de las curvas del canal para $n=0,60$ se puede inferir que en prótesis cuyos sustratos tengan módulos elásticos mayores a 100 MPa las superficies tendrían acercamientos que pueden provocar el contacto entre las asperezas superficiales ya que el espesor de la película lubricante es menor a $0,4 \mu\text{m}$. Esto puede observarse con mayor detalle en la figura 11 donde se ha aumentado la zona correspondiente a fluido no newtoniano de la figura 10.

Estas curvas predicen que en prótesis con polímeros de alto módulo elástico (comparado con el cartílago articular), no sólo aumentaría la fricción de la junta sino también la probabilidad del desgaste abrasivo.

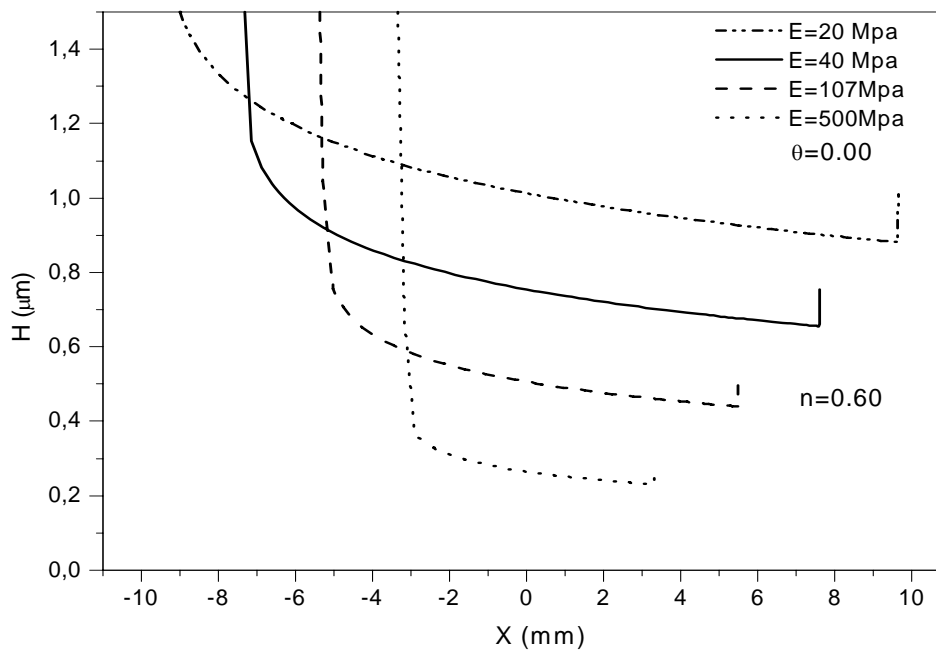


Figura 11: Ampliación de las curvas para fluido no Newtoniano de la figura 10.

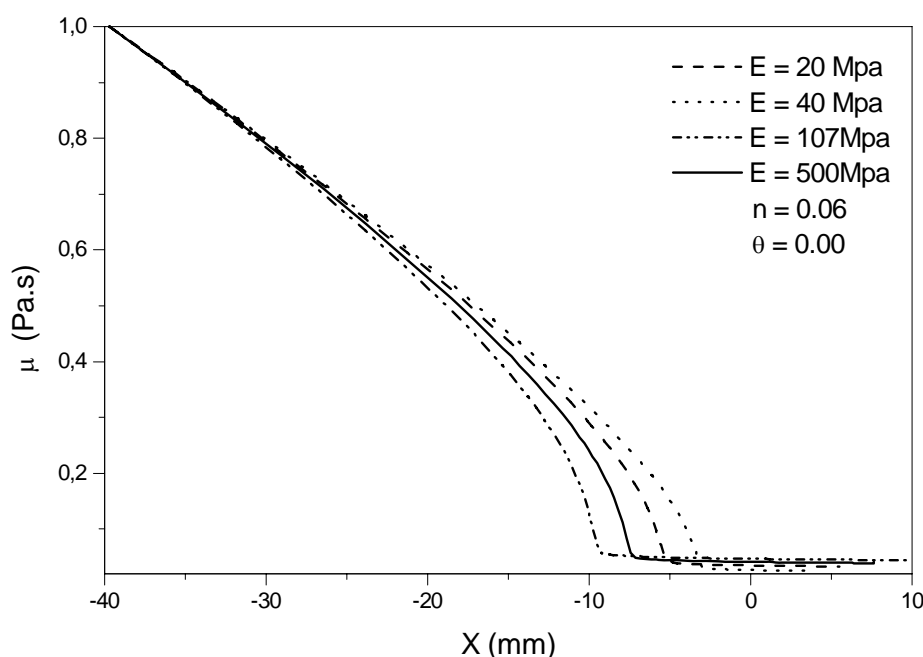


Figura 12: Variación de la viscosidad a lo largo de todo el canal, correspondiente a la figura 11.

El hecho de que, como se observa en la figura 10, la característica no newtoniana del fluido sinovial predispone a separaciones muy pequeñas entre los componentes de la prótesis, se justifica en que la disminución de la viscosidad del fluido observada en la figura 12, requiere compensarse con canales más estrechos para mantener una distribución de presiones acorde con la carga (ver ec. (5)), que en el proceso de variación de n se mantiene constante.

Para los módulos elásticos considerados en la figura 10, las reducciones del canal al pasar de $n = 1,0$ a $n = 0,60$, son del 82%, 83%, 85% y 91% para 20,0 MPa, 40,0 MPa, 107 MPa y 500 MPa respectivamente.

La figura 13 por su parte, muestra que la reducción de viscosidad por pseudoplasticidad, al igual que en rodilla natural, tiene influencia en la reducción del coeficiente de fricción (por ende de la fricción) lo cual es un aspecto beneficioso impulsado por dicha característica del fluido sinovial. Entre $n = 1,0$ y $n = 0,60$ la reducción del coeficiente de fricción es de 78% para 20,0 MPa y 82% para 500 MPa.

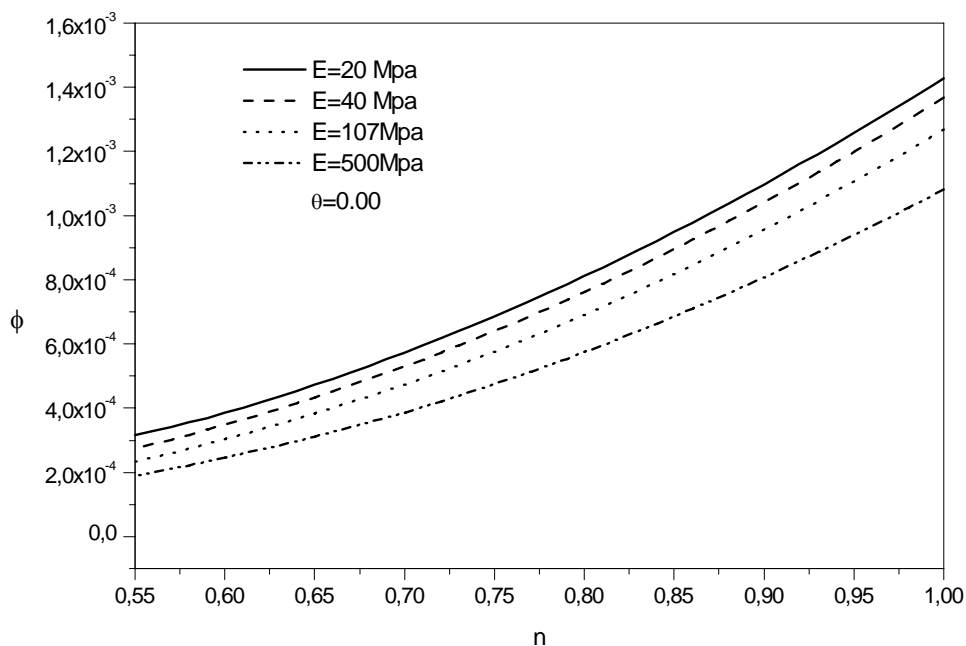


Figura 13: Coeficiente de fricción en función del coeficiente de viscosidad y el módulo elástico

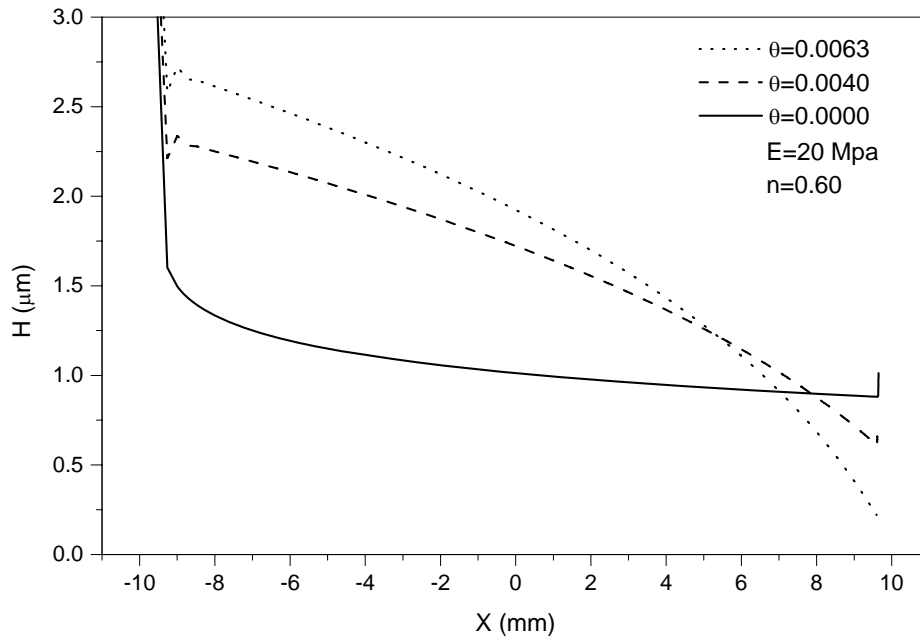


Figura 14: Canal de lubricación para distintas capacidades de exudación-absorción

Anteriormente mencionamos que la reducción del canal (producida por la pseudoplasticidad del fluido sinovial) es perjudicial debido a que alienta un posible contacto directo entre los sólidos. Pero este hecho puede ser contrarrestado por la capacidad de exudación-imbibición del sustrato que, como muestra la figura 14, promueve un aumento del canal a lo largo de un 92% de la zona de máximo acercamiento de las superficies. Allí, el canal debe permitir el flujo de una cantidad adicional de fluido que se agrega al torrente principal debido a la exudación del sustrato. Hacia el final del canal, el sustrato reabsorbe todo el fluido exudado de manera que se satisfaga el balance global de fluido entre la entrada y la salida de la región de generación de presión. Este mecanismo se muestra en la figura 15 .

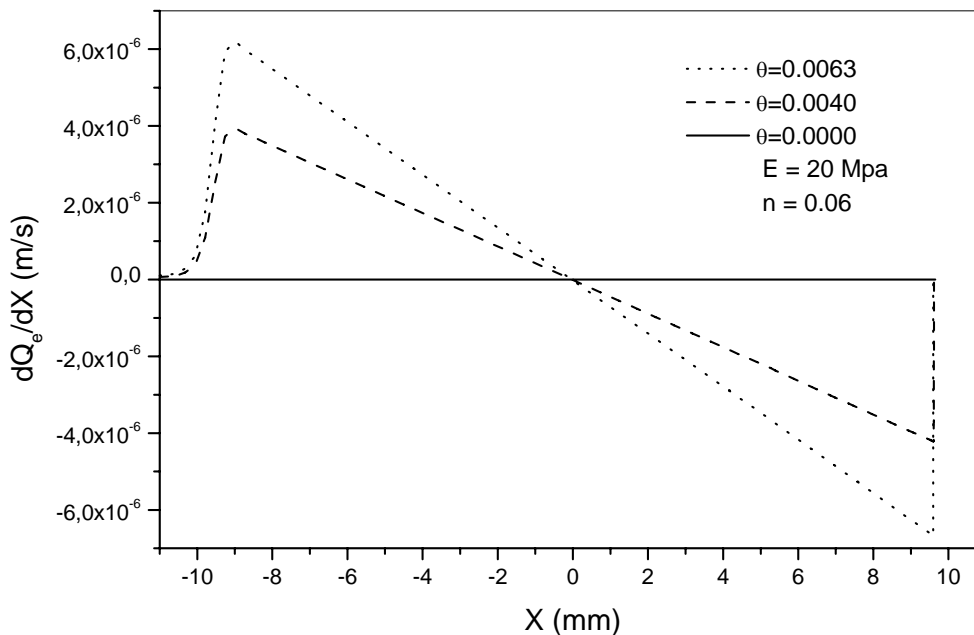


Figura 15: Mecanismo de exudación-absorción para los sustratos representados la figura 14.

La capacidad de exudación-absorción del sustrato poroso tiene también influencia sobre la fricción de la junta. La figura 16 muestra el coeficiente de fricción, no sólo se ve reducido por materiales mas rígidos, sino también por el mecanismo de liberación-absorción de fluido que induciría la porosidad del sustrato supuesto respecto a un sustrato no poroso.

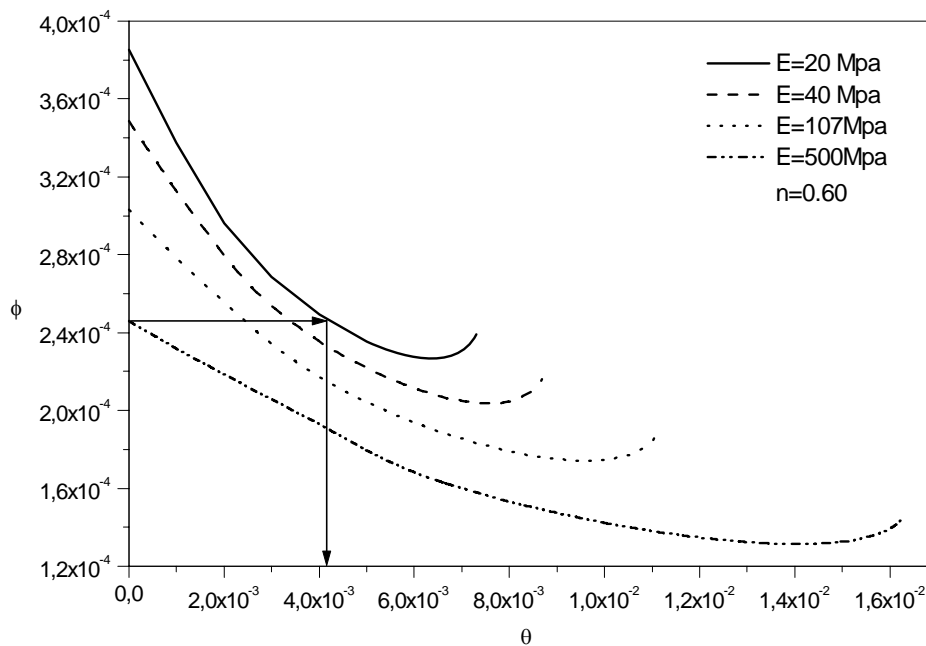


Figura 16: Coeficiente de fricción en función del coeficiente de exudación.

La disminución en el factor de fricción es en algunos casos de hasta un 45 % si los sustratos se construyesen con un θ óptimo, es decir el valor de θ para el cual el coeficiente de fricción es mínimo.

Si bien la construcción de sustratos con θ óptimo reduciría la fricción significativamente, es necesario considerar que dicho θ óptimo es variable en función de la carga como se ve en la figura 17. La utilización de un sustrato poroso con un θ en el entorno del óptimo, conllevaría cierto riesgo ya que una eventual variación de las condiciones de carga de la prótesis, haría posible su funcionamiento en la zona de fuerte aumento de la fricción. Por ejemplo, si a un paciente de 490 N de peso se le construye una prótesis conteniendo un sustrato con el factor de exudación óptimo ($\theta = 0,0092$), un eventual aumento del peso de este individuo haría que con dicho valor de θ , su prótesis pudiese encontrarse en zonas de funcionamiento de fuerte fricción. En la figura 11 se ve claramente este hecho entre las curvas correspondientes a 490 N y 735 N de peso corporal, donde el factor de exudación óptimo pasa de 0,0092 a 0,0063 respectivamente.

En algunas publicaciones del área de ortopedia y traumatología, se recomienda la construcción de prótesis personalizadas según las características del paciente. En lo que respecta a los aspectos anatómicos, esto sería beneficioso ya que el implante se adaptaría adecuadamente al individuo. Pero desde el punto de vista mecánico del sustrato poroso propuesto en este trabajo, no sería conveniente realizar una adaptación que tenga en cuenta el peso corporal ya que en pacientes con estos implantes, a medida que avanzan en su edad, es

común que aumenten de peso, aumento que en algunos casos puede sobrepasar los 245 N de diferencia entre las curvas de la figura 17. En la conclusiones se expondrá de qué manera se propone en este proyecto solucionar este inconveniente aprovechando los beneficios de la característica porosa del sustrato.

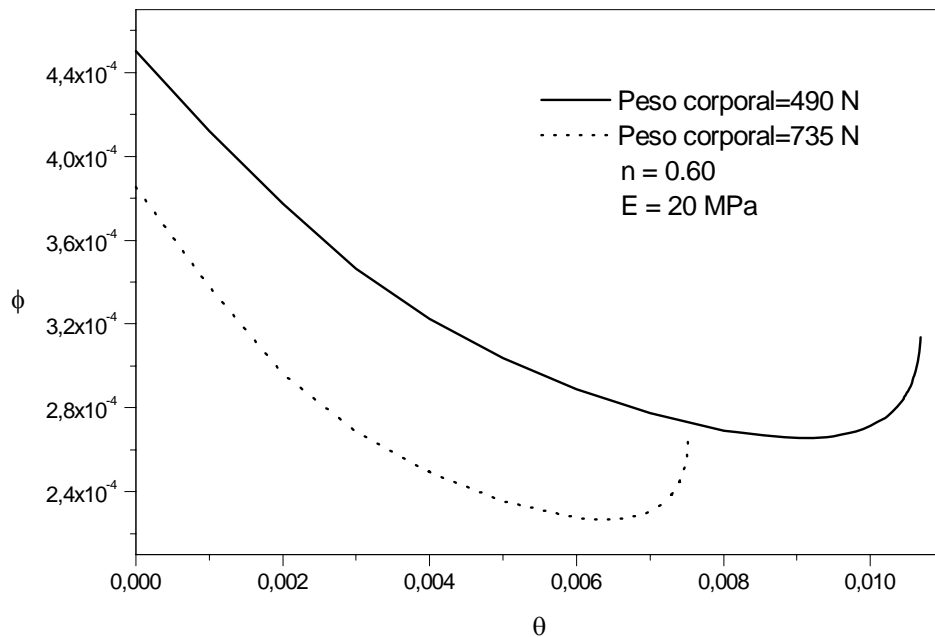


Figura 17: Variación de las curvas de la figura 16 con el peso corporal, para E=20,0 Mpa.

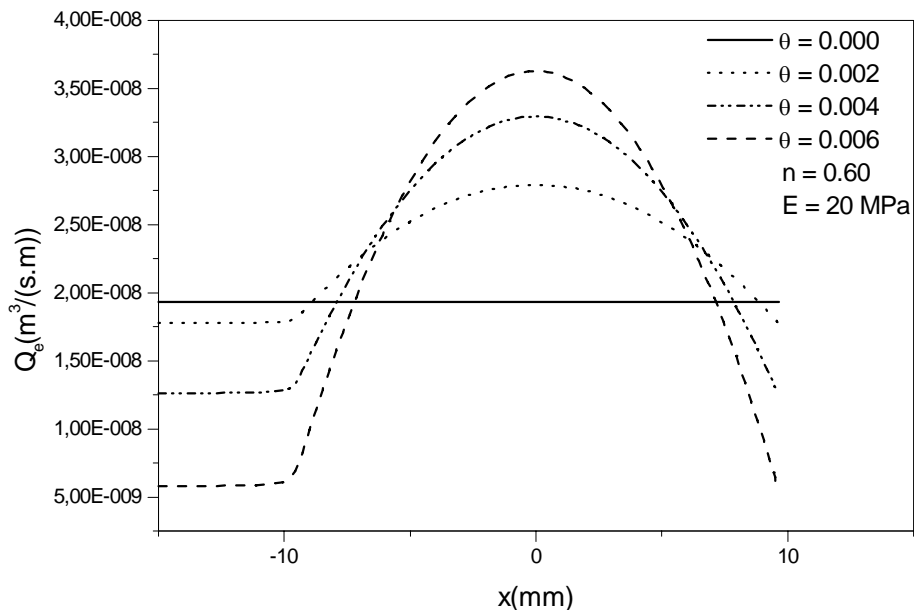


Figura 18: Caudal circulante para distintas capacidades de exudación-absorción del sustrato

La figura 18 muestra que a medida que el sustrato se torna mas poroso, necesita cada vez menos del aporte del líquido circundante a la articulación a la vez que aumenta la cantidad de líquido aportada desde el sustrato. Por este mecanismo, se reduce el coeficiente de fricción (hasta el θ óptimo), característica que beneficiará el funcionamiento de la junta artificial para bajas velocidades y cargas altas, características de las prótesis. Por ejemplo, en la parte central del contacto (coordenada $X=0$), al pasar de un sustrato no poroso ($\theta=0,00$) y $E=20,0$ MPa a otro con igual módulo elástico y con un θ óptimo

según la figura 17 ($\theta=0,0063$), se produce un aumento del caudal circulante de un 89%, mientras que el caudal entrante se reduce un 70%. A medida que la diferencia del coeficiente de exudación es mayor, este efecto se vuelve más notorio. De esta manera, las exigencias de la rodilla en la fase de estancamiento se verían aliviadas por el efecto “esponja” del sustrato propuesto.

Estos resultados sostienen la argumentación de que para la producción del componente tibial sería realmente beneficioso utilizar materiales de baja rigidez, cuyo módulo elástico se acerque a los valores que posee el cartílago articular.

5 CONCLUSIONES

Se ha resuelto un modelo de lubricación de junta sinovial con fluido no newtoniano. La información obtenida de los resultados es extremadamente difícil de obtener a través de métodos experimentales.

Los resultados para rodilla natural muestran la alteración de las variables del sistema respecto al caso límite de fluido newtoniano y demuestran el beneficio de la pseudoplasticidad del líquido sinovial al incrementarse por esta causa el mecanismo de autolubricación. Dicho incremento se asocia a una disminución adicional del coeficiente de fricción, lo cual indica que los cartílagos se preservan del desgaste, en buena medida por la acción del líquido sinovial.

Por otro lado, El polietileno utilizado en la producción del componente femoral de las prótesis actuales, al tener módulos elásticos superiores al cartílago articular (algunos sobrepasan 1,0 Gpa), tienen poca capacidad de deformación y, por lo tanto, los canales de lubricación con fluido sinovial no newtoniano tienen dimensiones menores que el tamaño de las rugosidades de los componentes protésicos (figura 11). Esto provocaría un contacto directo entre las rugosidades del polietileno y las asperezas del metal correspondiente al componente femoral, lo cual llevaría al conocido desgaste por abrasión, mientras que los sustratos con módulos elásticos del orden del cartílago articular logran separaciones entre las superficies articulares varias veces mayores que las rugosidades mencionadas.

Si bien los resultados se obtuvieron para un individuo de 735 N de Peso (75 Kg de masa), la figura 19 muestra que las dimensiones de la mínima separación entre las superficies protésicas se disminuye levemente para valores de carga mayores al considerado en este trabajo, presentando variaciones despreciables. Al pasar de un individuo de 735 N de peso a otro de 981 N (100 Kg de masa), el mínimo valor del canal se reduce de aproximadamente 0,88 μm a 0,83 μm , variación muy pequeña considerando la gran diferencia de carga que soporta la prótesis (las cargas de la figura 19 corresponden a tres veces el peso del individuo). Este argumento respalda la elección de un sustrato de baja rigidez para cualquier carga considerada en función de disminuir el desgaste abrasivo.

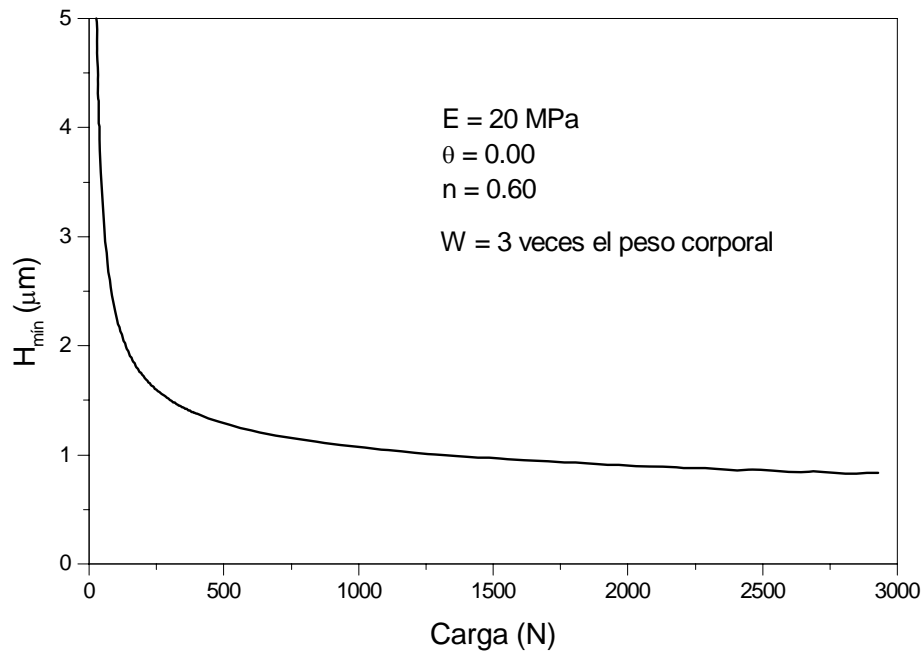


Figura 19: Variación del valor mínimo del canal con la carga.

Por otro lado, este beneficio podría verse comprometido con la característica pseudoplástica del fluido sinovial (figura 12), la cual provoca reducciones significativas del canal de lubricación. Como la existencia del fluido sinovial no sólo no se puede evitar sino que además beneficia la reducción del coeficiente de fricción, este inconveniente se puede solucionar con la característica porosa del sustrato propuesto, la cual provoca un aumento del canal en el 92 % de la extensión de la zona de máximo acercamiento de las superficies (figura 14).

Un análisis complementario de la figura 16 muestra que bajos coeficientes de fricción podrían lograrse construyendo sustratos menos rígidos pero porosos, como se indica a través de las flechas. Es decir, el bajo coeficiente de fricción que promueve un sustrato rígido, puede obtenerse con otro sustrato mucho menos rígido y con una cierta capacidad de exudación. Dicha posibilidad implica poder aprovechar los beneficios del mecanismo exudación-imbibición en cuanto a contrarrestar el efecto de la pseudoplasticidad del fluido sinovial que reduce el canal de flujo y aprovechar la deformabilidad del sustrato de baja rigidez para generar canales de flujo mayores. Esta particularidad alejaría definitivamente la posibilidad del contacto superficial de los constituyentes de la prótesis, al menos en la mayor parte del contacto.

Incluir la capacidad de exudación-absorción en el sustrato resulta beneficioso, pero no sería conveniente construir sustratos con θ óptimo para el cual se logra un mínimo de fricción, ya que es función del peso del individuo. La figura 17 muestra la tendencia a aumentar del coeficiente de fricción para valores superiores al θ óptimo. Si construimos un sustrato para un paciente de 490 N de peso (una masa de 50 Kg) con un θ óptimo, un aumento de peso llevaría a la prótesis a funcionar en una zona de fricciones quizás mas elevadas que el sustrato no poroso. Por lo tanto, es conveniente construir el sustrato para el mayor peso estipulado para el paciente dentro de márgenes aceptables (por ejemplo sumarle 25 Kg a la masa actual), ya que un aumento eventual de peso no provocaría fricciones muy elevadas.

La mayoría de los esfuerzos actuales se centran en mejorar el UHMWPE del componente tibial de las prótesis de rodilla. Se han propuesto soluciones mediante la implantación iónica para la formación de alúmina sobre la superficie metálica (lo cual reduce la fricción) [14], mejorando la compatibilidad geométrica de los componentes, utilizando métodos de esterilización menos dañinos para el polietileno [15] u otros procedimientos que reducirían el desgaste en este polímero. Pero como se mostró en este trabajo, debido a su comportamiento mecánico (en el mejor de los casos) el UHMWPE tendrá un límite en la reducción del desgaste si se siguen trabajando con los mismos módulos elásticos que hasta el momento, ya que se haría muy difícil evitar el contacto directo entre los materiales.

Algunos materiales están siendo estudiados para reemplazo del cartílago articular, como ciertos hidrogeles (N-vinilpirrolidona metil metacrilato [16]) o algunos elastómeros (poliuretano de grado médico [16]). De estos materiales, los primeros concuerdan con las características del sustrato propuesto en este proyecto. Además de reducir la fricción en las fases de estancamiento y al comienzo de la marcha luego de un período prolongado de reposo, mantienen una película lubricante entre las superficies en todo momento, lo cual se ha medido mediante una técnica de interferometría óptica realizada en [16]. No obstante, estos hidrogeles no han sido utilizados aún en la construcción de prótesis de rodilla y se encuentran actualmente en estudio.

REFERENCIAS

- [1] Ramirez J. C., Garduño E. V., Méndez Juan Luis Torres. “*Modelos estructurales de las prótesis de rodilla*”. Revista Mexicana de Ortopedia y Traumatología. 99-103. 10 (3). May-Jun. 1996.
- [2] Radin E.L., Fyhrie D.. “*Joint physiology and Biomechanics*”. Van C. Mow, Anthony Ratckiffe, Savio L-Y Woo. Biomechanics of Diarthrodial Joints. Volumen II. Chapter 31. 369-384. 1990.
- [3] Corvalán C.M., Di Paolo J. and Saita F.A., “*Elastohydrodynamic of porous substrates. Application to synovial joint analysis*”, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, **2**, 309-320, 1999.
- [4] Di Paolo J., Corvalán C.M. and Saita F. A., “*The low friction coefficient of articular joints: a self-lubricated action induced by the cartilage exudation-imbibition process*”, publicado en los proceedings (CD-ROM) del IV World Congress on Computational Mechanics, 1998.
- [5] Di Paolo J., Corvalán C. M. y Saita F. A., “*Análisis por elementos finitos del coeficiente de fricción en un modelo poroelastohidrodinámico de junta sinovial*”, Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, **XX**, núm. 1, marzo 1999.
- [6] Hlaváček M. And Vokoum D. “*Lubrication of a Cylindrical Synovial Joint Considering motion and Elastic Incompressible Cartilage*”. Wear, 165 (1993). 1-7.
- [7] Ribitsch V.O. “*Viscoelastic Behaviour of Synovial Fluids and Artificial Replacements*”. Van C. Mow, Anthony Ratckiffe, Savio L-Y Woo. Biomechanics of Diarthrodial Joints. Volumen II. Chapter28. 287-304. 1990.
- [8] Di Paolo J., Campana D. M, Ubal S., Corvalán C. M.. “*Lubricación de articulaciones humanas*”. Ciencia, Docencia y Tecnología. Universidad Nacional de Entre Ríos.Nº 23, año XII. (157-175). 2001.
- [9] Di Paolo J. “*Resolución simultánea de las ecuaciones que gobiernan los sistemas elastohidrodinámicos – aplicación al problema de contacto lineal*”. Tesis de magister. Facultad de Ingeniería Química. U.N.L. 1992.
- [10] Andriacchi T. P., Hurwitz D. E.. “*Gait biomechanics and the evolution of total joint replacement*”. Gait and Posture, **5**, 256-264, 1997.
- [11] Wang. S. H., Zhang H. H. “*Combined Effects of Thermal and Non-Newtonian Character of Lubricant on Pressure, Film Profile, Temperature Rise, and Shear Stress in E.H.L.*”. Journal of Tribology. Vol. 109. October 1987. 666-670
- [12] Bennett A. and Higginson G. R. “*Hydrodynamic lubrication of soft solids*”. Journal Mechanical Engineering Science. Vol 12, Nº 3. 218-222. 1970.

[13] Kurtz S. M., Muratoglu O. K., Evans M. And Edidin A. A. “*Advances en the processing, sterilization and crosslinking of ultra-high molecular weight polyethylene for total join arthroplasty*”. *Biomaterials*. 20. 1659-1688. 1999.

[14] Armini A. J., Bunker S. N. And Huntington D. M. “*adherent Alumina Coatings by Ion Beam System*”. *Alternative bearing Surfaces in Total Join Replacemete*. ASTM STP 1346. J.J. Jacobs and T.L. Craig. Eds American Society for Testing and Materials. 1998.

[15] Mc Nulty, Donald E., Liao yen-Shuo, Haas brian D. “*The influende of sterilization methods on wear performance of the low contact stress total knee system*”. *Orthopedics*. 2002.

[16] McClure G., Jin Z.M., Fisher J., Tighe B.J.. “*Determination of lubricating film thickness for permeable hydrogel and non-permeable polyurethane layers bonded to a rigid substrate with particular reference to cushion form hip joint replacements*”. 1996.

APENDICE

La ecuación constitutiva para el comportamiento pseudoplástico del fluido sinovial es del tipo de ley de potencia:

$$\tau = m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n, \text{ ó bien } \tau = \eta^* \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

donde $\eta^* = m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}$, denominada viscosidad equivalente.

Para obtener una ecuación de Reynolds modificada para admitir esta viscosidad variable con los gradientes de velocidad, utilizamos el método de perturbación seguido por Wang y Zhang en [ref]. Sea:

$$I = \frac{\partial u}{\partial y}$$

y la velocidad del flujo, supuesta como Couette dominante:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \varepsilon \mathbf{u}_1$$

donde ε es un pequeño parámetro adimensional.

Luego:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} = I; \quad I_o = \frac{\partial u_o}{\partial y} \quad \text{e} \quad I_1 = \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

Expandiendo η^* en serie de Taylor con centro en I_o

$$\eta^* = \eta^*(I_o) + (I - I_o) \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial I} \right)_{I_o}$$

$$I - I_o = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_o}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} \Rightarrow \eta^* = \eta^*(I_o) + \varepsilon I_1 \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial I} \right)_{I_o}$$

Si denominamos

$$\eta_o^* = \eta^*(I_o) \quad \text{y} \quad \eta_1^* = I_1 \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial I} \right)_{I_o}$$

$$\eta^* = \eta_o^* + \varepsilon \eta_1^*$$

Luego, del balance de cantidad de movimiento diferencial:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (\eta^* I) = \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

donde ϕ es una función auxiliar

$$\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\eta_o^* + \varepsilon \eta_1^*) \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]$$

luego, operando, surge que

$$\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_o^* \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_o^* \frac{\partial u_1}{\partial y} + \eta_1^* \frac{\partial u_o}{\partial y} \right)$$

de donde:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_o^* \frac{\partial u_o}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \eta_o^* \frac{\partial u_o}{\partial y} = cte.$$

Como η_o^* sólo depende de l_o , ambos deben ser constantes en la dirección y para cualquier posición en x .

$$\frac{\partial u_o}{\partial y} = C_1 \Rightarrow u_o = C_1 y + C_2$$

que integrada con las correspondientes condiciones de contorno:

$$y = 0, u_o = 0; \quad y = h, u_o = 2V$$

$$u_o = \frac{2V}{h} y$$

Asimismo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_o^* \frac{\partial u_1}{\partial y} + \eta_1^* \frac{\partial u_o}{\partial y} \right)$$

que integrada con las siguientes condiciones de contorno para u_1 :

$$y = 0, u_1 = 0; \quad y = h, u_1 = 0$$

$$u_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{h}{2v} \right)^{n-1} \frac{1}{2mn} (hy - y^2)$$

Como $u = u_o + \varepsilon u_1$ y $\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$

$$u = \frac{2v}{h} y - \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{h}{2v} \right)^{n-1} \frac{1}{2mn} (hy - y^2)$$

Como el caudal de fluido es constante a lo largo de cualquier sección de flujo, se tiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 12mn \left(\frac{2v}{h} \right)^{n-1} \frac{vh - q_e}{h^3}$$

que es la Ecuación de Reynolds modificada en forma diferencial. Si

$$\mu_{e(x)} = m \left(\frac{2v}{h(x)} \right)^{n-1} \quad y \quad \mu_{e(-\infty)} = \mu_o = m \left(\frac{2v}{h(-\infty)} \right)^{n-1}$$

$$\frac{\mu_e}{\mu_o} = \left[\frac{h(-\infty)}{h(x)} \right]^{n-1} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 12n \mu_o \left[\frac{h(-\infty)}{h(x)} \right]^{n-1} \frac{vh - q_e}{h^3}$$

Finalmente, la versión integral utilizada en este trabajo, resulta:

$$p(x) = 12n \mu_o \int_{-\infty}^x \left[\frac{h(-\infty)}{h} \right]^{n-1} \frac{vh - q_e}{h^3} dx$$