

ANÁLISIS COMPUTACIONAL DE FLUJOS SANGUÍNEOS UTILIZANDO MODELOS 3D AXISIMÉTRICOS Y EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Sebastián Ubal *, Diego M. Campana *, Cristóbal Fresno Rodríguez **,
Marcelo E. Berli * y José Di Paolo ***

Facultad de Ingeniería – UNER

Ruta 11, km 10, 3100, Oro Verde, Entre Ríos, Argentina

Tel. 54 – 343 – 4975100, e-mail: jdipaolo@bioingenieria.edu.ar

RESUMEN

La aterosclerosis provoca obstrucción parcial o total de arterias, constituyéndose en una de las principales causas de decesos en los países desarrollados. Numerosas observaciones clínicas indican que la fluidodinámica juega un papel importante en el desarrollo y evolución de esta patología.

La investigación mediante métodos no invasivos permite el estudio sistemático sin exponer individuos a situaciones de experimentación. Particularmente, los modelos matemáticos 3D axisimétricos son de mucha utilidad debido a que logran capturar las características fundamentales del flujo con gran economía de cálculo frente a modelos 3D sin simetrías.

En este trabajo se aprovecha la característica simplificatoria de los modelos axisimétricos para analizar la influencia de la frecuencia de un pulso senoidal de caudal sobre el patrón de flujo en un tramo de un conducto que presenta una estenosis. También se comparan predicciones de caídas de presión medidas con catéteres de longitud finita con las obtenidas simulando catéteres infinitos. En ambos casos se resuelve un modelo compuesto por las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad con condiciones iniciales y de borde apropiadas, utilizando software de elementos finitos, construido al efecto en el primer caso y adquirido en el segundo.

En la primera simulación los resultados muestran que a mayores frecuencias de pulsación se reafirman las condiciones para la aparición y/o crecimiento de placas de ateroma y, en la segunda, que es pertinente la hipótesis de catéter infinito.

Palabras clave: flujo sanguíneo, estenosis, catéter, modelos axisimétricos, elementos finitos

Artículo producido por la ejecución del *PID 6072, Análisis Computacional de Flujos Sanguíneos*, financiado por la UNER desde el 20/10/04 al 20/10/07.

* Integrantes del PID 6072 (Docentes Investigadores)

** Integrante del PID 6072 (Becario de Iniciación a la Investigación de la UNER)

*** Director del PID 6072

INTRODUCCIÓN

Una de las principales patologías que presenta el sistema circulatorio y principal causa de decesos en los países desarrollados lo constituye la aterosclerosis. Esta patología consiste en una degeneración de la pared vascular que se produce en arterias, fundamentalmente en el territorio sistémico. Compromete así a las arterias coronarias, renales, carótidas, vertebrales, intracraneales, ilíacas, de los miembros inferiores, aorta y sus ramas abdominales. Dicha degeneración ocasiona un engrosamiento de la pared arterial y como consecuencia, una disminución en el lumen (estenosis), dificultando la circulación de la sangre. Este proceso provoca la falta de oxígeno en los tejidos irrigados por este vaso y si la obstrucción es completa puede ocasionar la consecuente muerte (necrosis) de dichos tejidos. Las placas de ateroma al crecer hacia la luz vascular, originan obstrucciones de diferente grado con el consecuente aumento de la resistencia al flujo sanguíneo

Numerosas observaciones clínicas indican que la fluidodinámica juega un papel importante en el desarrollo y evolución de esta patología (Nerem y Cornhill 1980). Flujos lentos y/o con bajas tasas de deformación podrían fomentar la adhesión de monocitos a la pared vascular e influir en la transferencia de sustancias a la misma (Das, Johnson y Popel 2000). Por otro lado, experiencias in-vitro indican que la función y estructura celulares del endotelio son afectados por las fuerzas cortantes que el flujo sanguíneo le ejerce (Sato, Kataoka y Ohshima 1996; Kamiya y Ando 1996), llegando incluso a dañarlo en el caso que los esfuerzos sean lo suficientemente intensos (Fry 1968). La comparación de observaciones clínicas con estudios in vitro y con simulaciones numéricas ha permitido establecer una fuerte correlación entre los sitios de localización preferencial de la lesión y los lugares donde el flujo produce esfuerzos de corte bajos y oscilatorios (Ku 1997).

Las condiciones de flujo están caracterizadas por los números de Reynolds y Womersley. Este último relaciona las fuerzas inerciales pulsátiles con las viscosas. La frecuencia cardíaca —y por ende, el parámetro de Womersley— puede variar entre unas 70 y 180 pulsaciones por minuto, dependiendo de las condiciones de ejercicio. Puesto que los sitios de lesión aterosclerótica están fuertemente relacionados con un carácter oscilatorio del esfuerzo cortante, el efecto de la frecuencia cardíaca sobre esta variable amerita ser estudiado

Por otra parte, en el caso particular de las arterias coronarias que irrigan al músculo cardíaco, una placa de ateroma puede provocar la necrosis de una zona del corazón, lo que constituye un infarto de miocardio. De aquí la importancia del estudio y caracterización de la hemodinamia en las estenosis ([Anderson y col. 1986](#)). Se han desarrollado diversos métodos para el tratamiento de esta patología; uno de ellos es la angioplastia por balón, la cual consiste en la introducción de un catéter mediante una guía. El catéter está provisto de una especie de globo o balón en su extremo que, al atravesar la estenosis, se infla para comprimir la placa y provocar la dilatación del canal de flujo. Este es un método muy utilizado en la actualidad debido a su eficacia y relativamente baja invasividad. Los catéteres utilizados para la angioplastia normalmente permiten la medición de la presión sanguínea. En su interior hueco ingresa sangre, la cual permanece prácticamente estancada durante el procedimiento; la presión de la

sangre es registrada por un sensor ubicado en el extremo proximal del dispositivo. Por ello es común la utilización de catéteres angioplásticos para la medición de presiones en cavidades del sistema cardiovascular o caídas de presión a través de estenosis, que se registran ubicando convenientemente el extremo distal del dispositivo.

Es evidente que la presencia del catéter dentro de la arteria provoca cambios en las condiciones del flujo, con respecto a la situación fisiológica o basal, que se da en ausencia del mismo. Esto hace que los valores de las caídas de presión registradas por el dispositivo difieran de la producida en la condición basal, lo que puede conducir a una inadecuada interpretación de la realidad. Este hecho se pone de manifiesto en las grandes caídas de presión reportadas a través de las mediciones (50 mmHg), que llegan a ser aproximadamente la mitad de toda la caída de presión media temporal producida en las arterias coronarias y venas ([Back 1994](#)).

La formulación y utilización de modelos matemáticos de fenómenos biológicos, permite el estudio sistemático sin exponer individuos a situaciones de experimentación. Por tal motivo, puede interpretarse que la utilización de modelos suficientemente validados para la obtención de información de aplicación clínica constituye un método de diagnóstico no invasivo. Particularmente, los modelos 3D axisimétricos son de mucha utilidad debido a que logran capturar las características fundamentales del flujo con gran economía de cálculo frente a modelos 3D sin simetrías. Ello debido a que la simetría axial transforma la formulación espacial de 3D a 2D al desestimarse las variaciones respecto a la coordenada circunferencial.

En este trabajo se aprovecha la característica simplificatoria de los modelos axisimétricos, para obtener predicciones sobre flujos sanguíneos mediante recursos computacionales estándares y software de desarrollo propio. Un primer objetivo lo constituye el análisis de la influencia de la frecuencia de un pulso senoidal de caudal sobre el patrón de flujo en un tramo de un conducto que presenta una estenosis; este análisis es genérico y se realiza sobre una obstrucción también de características senoidales. Para tal fin, se plantea un modelo compuesto por las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad, con condiciones iniciales y de borde apropiadas. La técnica de resolución se basa en el método de Galerkin/elementos finitos de formulación mixta velocidad-presión sobre elementos bicuadráticos-bilineales de Lagrange. El dominio, no deformable, se divide en una malla estructurada de cuadriláteros.

Un segundo objetivo del trabajo es modelar el proceso de medición de la presión sanguínea que realizan los catéteres angioplásticos (teniendo en cuenta que el dispositivo posee una longitud axial finita) y comparar los resultados con aquellos obtenidos al usar catéteres infinitos; de esta forma se pretende conocer el grado de validez de la aproximación usada en trabajos previos ([Di Paolo y col. 2006](#)). En este caso, la solución del modelo axisimétrico se logró mediante un paquete comercial de cálculo mediante elementos finitos.

Los resultados obtenidos permiten analizar la extensión y duración de los vórtices que se originan en la estenosis, como así también la distribución de esfuerzos cortantes sobre la pared del conducto. De esta manera, se han identificado las regiones donde se observan preferencialmente altos o bajos esfuerzos de corte,

los que han sido caracterizados mediante un análisis frecuencial de sus componentes armónicas.

Por otra parte, se logró mostrar que a pesar de la fuerte influencia del tamaño del catéter sobre la caída de presión en la estenosis, no se alteran notablemente los valores de esta variable al considerar un catéter infinito respecto de uno finito. Esta situación permite establecer que la aproximación de catéter con longitud axial infinita adoptada por [Di Paolo y col. 2006](#), describe adecuadamente el comportamiento de la variable de mayor interés: la caída de presión translesional.

ECUACIONES DEL MODELO GENÉRICO DE FLUJO AXISIMÉTRICO EN CANALES RÍGIDOS

Para la formulación del modelo se consideró a la sangre como un fluido incompresible y newtoniano. Aunque la sangre tiene un comportamiento reológico más complejo, para los caudales y radios de arteria estudiados en este trabajo, el modelo newtoniano constituye una muy buena aproximación ([Banerjee y col. 1999](#) y [Cho y col. 1991](#)). Por simplicidad, en el tramo del conducto analizado, se suponen válidas las condiciones de simetría axial y rigidez de la pared arterial. Esta última hipótesis es ampliamente aceptada, ya que en arterias pequeñas se ha demostrado que la influencia de la elasticidad sobre el flujo es despreciable ([Moayeri y col. 2003](#) y [Back y col. 1996](#)). Las dimensiones de la arteria también tornan despreciables los efectos gravitatorios y se sabe que en estas regiones del árbol circulatorio la sangre circula en condiciones de flujo laminar.

Bajo las hipótesis enumeradas en el párrafo anterior, el flujo está gobernado por las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

donde ρ es la densidad de la sangre y μ su viscosidad dinámica.

Dado que los dos fenómenos estudiados corresponden a geometrías axisimétricas, las ecuaciones (1) y (2) adimensionalizadas lucirán:

$$Wo \frac{\partial v_r}{\partial t} + Re \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \quad (3)$$

$$Wo \frac{\partial v_z}{\partial t} + Re \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

donde $Re = \rho VR/\mu$ es el número de Reynolds y $Wo = \rho \omega R^2/\mu$ es el número de Womersley. En estas expresiones, R es el radio del tubo en una región sin

obstruir, mientras que ω y V son, respectivamente, la frecuencia angular y velocidad media máxima del caudal circulante. Las escalas características empleadas en las ecs. (3) y (4) son: V para las velocidades, R para las longitudes, $1/\omega$ para el tiempo y $\mu V/R$ para las tensiones.

Vale destacar que las ecuaciones (3) y (4) representan el flujo viscoso incompresible en una gran cantidad de situaciones 2D en geometrías cilíndricas axisimétricas. Son las apropiadas condiciones de contorno e iniciales las que completan el modelo y distinguen un caso de otro como puede verse en las partes I y II de este trabajo.

PARTE I: ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA FRECUENCIA CARDÍACA SOBRE EL FLUJO EN ARTERIAS CON ESTENOSIS

I – 1 MODELO TEORICO:

El flujo sanguíneo arterial es eminentemente pulsátil. Las ondas de presión y caudal varían en un grado elevado, dependiendo de la ubicación dentro del complejo árbol circulatorio. En esta parte del trabajo se pretenden analizar los efectos generales que posee la variación de la frecuencia cardíaca sobre algunas variables fluidodinámicas, principalmente el esfuerzo de corte que el fluido ejerce sobre la pared de un vaso que presenta una estenosis. Las condiciones de flujo y características geométricas poseen una enorme diversidad, de acuerdo a la porción del árbol circulatorio estudiado, e incluso entre distintos individuos para un mismo vaso sanguíneo. Por ello, se ha descartado la elección de parámetros específicos de una arteria particular: la configuración geométrica del dominio, el pulso de caudal utilizado y los valores asignados a los números adimensionales son genéricos, aunque éstos últimos son característicos de arterias de calibre pequeño y mediano.

Se ha optado por una variación temporal del caudal circulante (onda de pulso), de tipo senoidal, cuya expresión adimensional es la siguiente si el mismo es medido en unidades de $V\pi R^2$:

$$Q = \text{sen}(t), \quad (5)$$

La figura I-1 muestra un esquema del dominio del problema en la región cercana a la estenosis. Como puede observarse, la misma tiene forma sinusoidal, y en el punto de constricción máxima ($z = 46$) el radio del conducto es r_{EST} . La estenosis está caracterizada por su longitud adimensional L_{EST} y el grado de obstrucción en porcentaje de la sección transversal original, $G = (1 - r_{EST}^2) \times 100\%$.

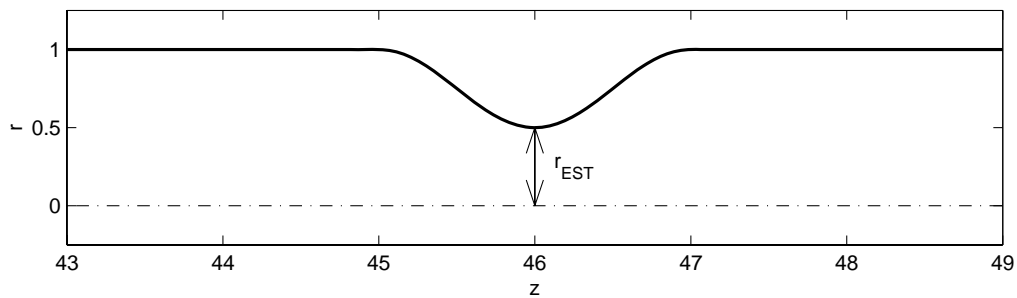


Figura I-1: Esquema del dominio del problema en su región central, donde está presente la estenosis. La sección de entrada se ubica en $z = 0$ y la de salida en $z = 92$.

Las condiciones de contorno utilizadas para las ecuaciones (3) y (4) son: $v_r = \partial v_z / \partial r = 0$ sobre la línea de simetría ($r = 0$), $v_r = v_z = 0$ en la pared ($r = 1$), $\partial v_r / \partial z = \partial v_z / \partial z = 0$ en la sección de salida ($z = 92$), y $v_z = U(r, t)$ en la sección de entrada ($z = 0$). Estos últimos son los perfiles de velocidad correspondientes a un caudal sinusoidal como el de la ec. (5) en un tubo sin estenosis, y que fueron calculados por Womersley (1955). Se adopta como presión de referencia ($p = 0$) a la existente en la sección de salida ($z = 92$).

Las simulaciones se inician con el fluido en reposo como condición inicial. Se extienden en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 3\pi$, equivalente a tres semiciclos del pulso de caudal. Sin embargo, a fin de descartar los efectos transitorios generados por la condición inicial, se analizan sólo los dos últimos semiciclos.

I – 2 METODOLOGÍA Y TÉCNICA NUMÉRICA

La técnica numérica utilizada para resolver las ecuaciones gobernantes (ecs. (3) y (4)) está basada en el método de elementos finitos con una formulación estándar (Wille, 1982). Por este motivo, la misma será descripta sólo de manera somera.

Para la discretización espacial de las ecs. (3) y (4), el dominio del problema fue dividido en elementos cuadriláteros de Lagrange, conformando una malla estructurada. Se utilizó una formulación mixta velocidad-presión, con funciones base bicuadráticas y bilineales para aproximar las variables primitivas.

Luego del planteo de los residuos ponderados de Galerkin de las ecuaciones gobernantes, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, las que se discretizan mediante un sencillo esquema de diferencias finitas hacia atrás para las derivadas respecto al tiempo. El sistema de ecuaciones algebraicas no-lineales resultante se resuelve en un lazo de Newton. El algoritmo se constituyó en un programa de elaboración propia en lenguaje FORTRAN, para la solución del sistema de ecuaciones en cada iteración se utilizó en el paquete SuperLU (Demmel y col. 1999).

Los parámetros numéricos utilizados fueron los siguientes. La malla empleada en las simulaciones constó de 910×8 elementos en las direcciones axial y radial, respectivamente, determinando un total de 70113 grados de libertad. El intervalo $0 \leq t \leq 3\pi$ fue dividido en 100 pasos de tiempo fijos.

I – 3 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En todos los experimentos numéricos mostrados en este trabajo se utilizó un valor

fijo del número de Reynolds, $Re = 100$. La geometría de la estenosis fue también mantenida en todas las simulaciones, con una longitud $L_{EST} = 2$ y un porcentaje de obstrucción $G = 75\%$. A los efectos de investigar la influencia de la frecuencia del pulso de caudal sobre las variables fluidodinámicas, se exploraron diferentes valores del número de Womersley entre 5 y 20. El conjunto de parámetros utilizados podría ser —aproximadamente— el que caracteriza el flujo sanguíneo en las arterias coronarias. No obstante, debe tenerse en cuenta que este trabajo no pretende analizar las condiciones específicas del flujo en una arteria en particular, sino por el contrario, investigar algunos rasgos generales de la hemodinámica en vasos sanguíneos estenosados.

Los resultados obtenidos permiten observar en detalle la evolución en el tiempo de los campos de velocidad y presión. Sin embargo, existen numerosos trabajos en los que se han estudiado en profundidad estas variables. Por esta razón, se decidió analizar el comportamiento del esfuerzo de corte que el líquido ejerce sobre la pared, $\tau(z,t)$, ya que es una variable de gran importancia desde el punto de vista fisiológico y fisiopatológico.

La figura I-2 muestra la evolución en el tiempo de la distribución de esfuerzos cortantes. Debido a la simetría temporal del pulso de caudal y espacial del dominio, sólo se ilustran los intervalos de tiempo y espaciales de relevancia. Así, para $2\pi \leq t \leq 3\pi$ el caudal se encuentra en un semiciclo positivo, y las recirculaciones se producen aguas abajo de la estenosis. Los gráficos de la figura I-2 son curvas de nivel $|\tau(z,t)| = c_n$; los valores c_n están distribuidos de manera logarítmica, y son los mismos para todos los números de Womersley estudiados. En particular, se trazó también la curva $\tau(z,t) = 0$ en línea negra gruesa. La misma permite identificar los lugares e instantes donde se produce el desprendimiento de la capa límite y la formación de los vórtices.

Como puede verse, todos los gráficos muestran algunas características similares. En la región de la estenosis, donde la sección de paso se ha reducido a una cuarta parte de su valor normal, se producen los esfuerzos de corte más altos, alcanzando magnitudes al menos un orden de magnitud mayor a las observadas en un tramo recto. Aguas abajo del estrechamiento se aprecia que, casi al inicio del semi-ciclo analizado, se produce una recirculación cuyo tamaño va aumentando hasta el instante en que el flujo sobre la pared invierte su dirección ($t \sim 9$) y el vórtice se desprende de la pared. En cambio, aguas arriba de la estenosis el flujo prácticamente no se ve perturbado por la presencia de la misma. Las diferencias principales entre los distintos casos radican en la extensión de los vórtices y en la distribución de los esfuerzos cortantes aguas abajo de la estenosis. Como se verá, sin embargo, estas diferencias no son demasiado importantes.

La figura I-2 muestra que el tamaño de las recirculaciones, hacia el final del semi-ciclo, aumenta a medida que se incrementa el parámetro Wo . En la figura I-3 se grafica la longitud de los vórtices en función del tiempo, para los diferentes números de Womersley analizados. Las recirculaciones aparecen casi al inicio del intervalo de tiempo analizado, aproximadamente en $t \sim 6.5$, aunque el instante en el que se produce el desprendimiento inicial se retarda ligeramente a medida que Wo aumenta. Hacia el final del ciclo ($t \sim 9$) los vórtices se separan de la pared, aunque con pequeñas diferencias en el instante de tiempo particular (el fenómeno

ocurre antes a medida que W_0 se incrementa). Es decir, los vórtices están presentes un 80% del semiciclo. Durante las primeras 7/10 partes de su duración, la longitud de los vórtices depende de manera inversa del W_0 ; el comportamiento se invierte para los restantes 3/10 de su existencia. Las diferencias entre los tamaños de las recirculaciones son mucho más pronunciadas durante ésta última fase.

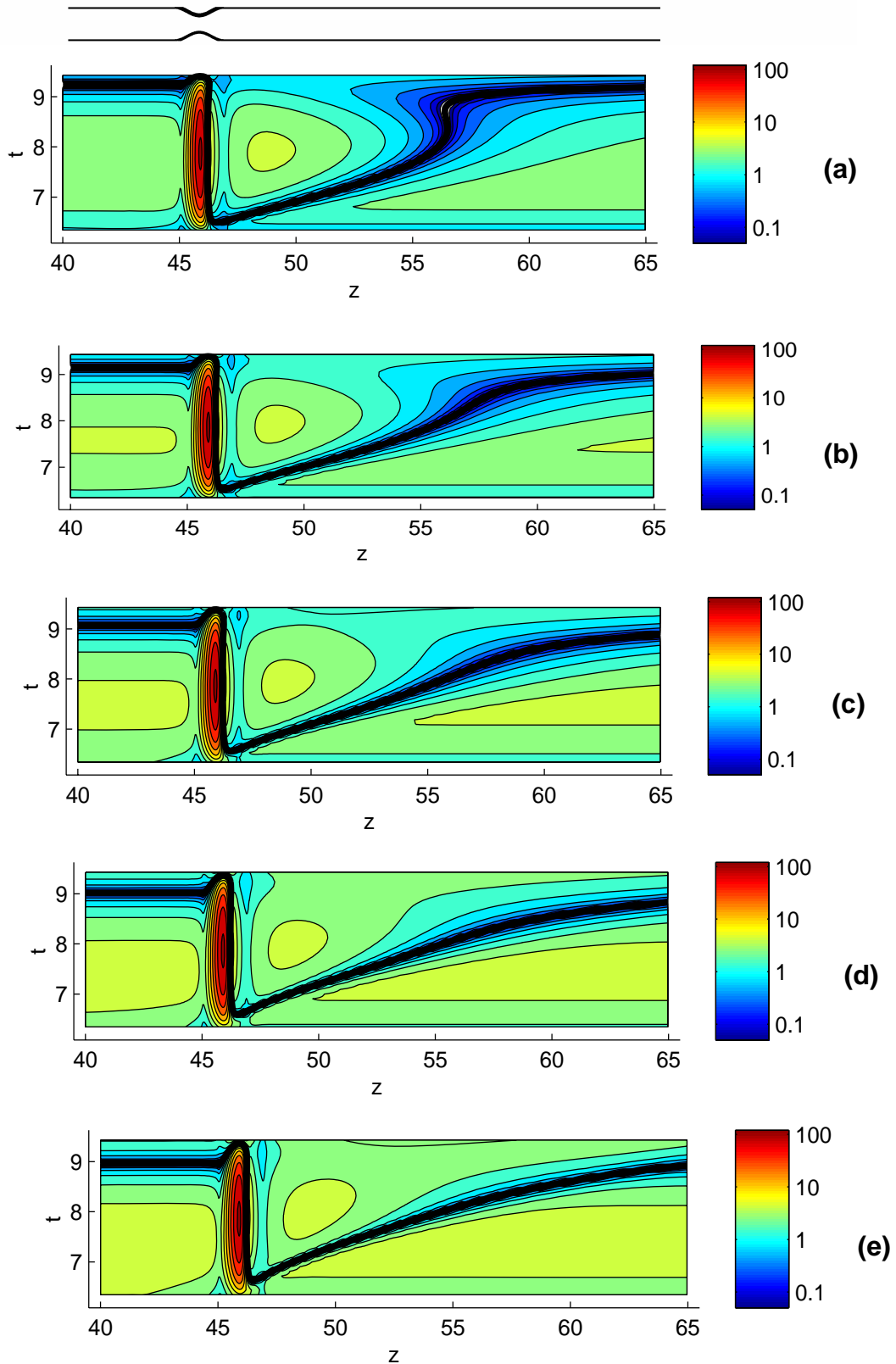


Figura I-2: Esfuerzo de corte en la pared en función de la posición y del tiempo. Las gráficas muestran curvas de nivel de $|\tau(z,t)|$, espaciadas logarítmicamente, en el intervalo de tiempo $2\pi \leq t \leq 3\pi$, correspondiente al último semi-ciclo, de caudal positivo. Se incluye en la parte superior un contorno del tramo del dominio espacial analizado para una fácil referencia. (a) $Wo = 5$, (b) $Wo = 8$, (c) $Wo = 11$, (d) $Wo = 15$ y (e) $Wo = 20$.

También se observan algunas diferencias en la distribución de esfuerzos cortantes aguas abajo del estrechamiento. En general se aprecia que los mismos son algo mayores a medida que se incrementa el número de Womersley. La figura I-4 muestra el promedio temporal durante un ciclo completo de las tensiones de corte, en función de la posición, para distintos valores de Wo . En ella se aprecia que la influencia del parámetro de Womersley es pequeña, y sólo es apreciable en las regiones donde $\tau(z,t)$ es bajo. La simetría de las curvas se debe a que el pulso de caudal y el dominio también lo son. Se puede apreciar que en la región de máximo estrechamiento el valor medio de $|\tau(z,t)|$ es superior a 60, es decir, más de 15 veces mayor al valor correspondiente a un flujo estacionario Poiseuille ($\tau_{Po} = 4$) para igual número de Reynolds en un tubo sin estenosis. El esfuerzo cortante desciende rápidamente a medida que nos alejamos de la zona estenosada ($45 \leq z \leq 47$). Como es de esperar, en los extremos del dominio, donde el flujo es prácticamente unidireccional, la media de $\tau(z,t)$ tiende asintóticamente a cero. En cambio, el promedio de $|\tau(z,t)|$ tiende asintóticamente a un valor entre 0 y 4, que se incrementa a medida que aumenta Wo . La figura I-4 (c) permite identificar además regiones muy cercanas a la estenosis donde el esfuerzo cortante es particularmente pequeño. En $z \sim 46.95$ el valor medio de $|\tau(z,t)|$ no alcanza a 2. Esta región también es apreciable en la figura I-2.

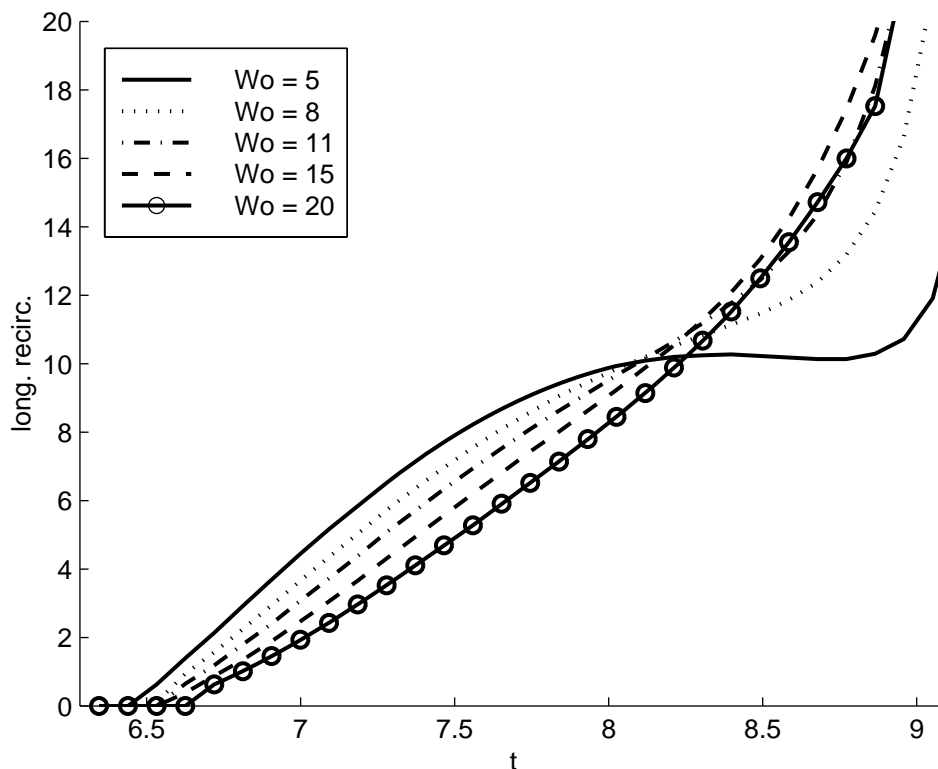


Figura I-3: Tamaño de las recirculaciones formadas aguas abajo de la estenosis, en el intervalo de tiempo correspondiente al tercer semiciclo (donde el caudal es positivo) para diferentes valores del parámetro Wo .

Con el objeto de continuar analizando el efecto de la frecuencia del pulso sobre las tensiones de corte, se eligieron algunos puntos particulares a lo largo de la coordenada axial donde se estudiará en detalle la evolución en el tiempo de $\tau(z,t)$

durante un ciclo completo, $\pi \leq t \leq 3\pi$. La figura I-5 muestra las variaciones en el tiempo de esta variable, para $z = 46, 47, 50, 53$ y 92 . Estas posiciones corresponden, respectivamente, al punto de máximo estrechamiento, al lugar donde se registran menores valores medios de $|\tau(z,t)|$, a dos puntos arbitrarios aguas abajo de la estenosis y al extremo derecho del dominio de cálculo. Esta última se adoptó a los efectos de tener una referencia, ya que en esta localización el flujo es unidireccional. Las tensiones de corte correspondientes a un caudal senoidal (ver Womersley, 1955) tienen también la forma de una oscilación armónica pura, aunque con un desplazamiento de fase. Esto puede confirmarse visualmente en la figura I-5, y fue verificado mediante un análisis frecuencial de las soluciones numéricas. El efecto del número de Womersley es incrementar las tensiones tangenciales máximas y producir un pequeño adelanto de fase.

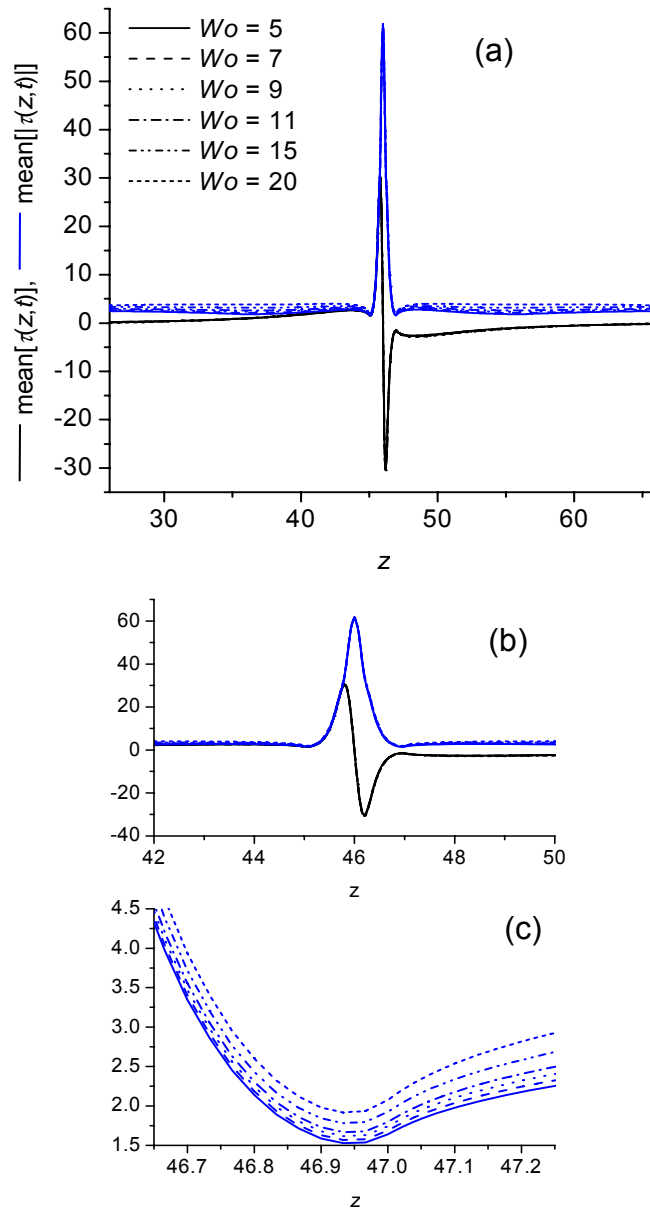


Figura I-4: Media temporal (en el intervalo $\pi \leq t \leq 3\pi$) de $\tau(z,t)$ y de $|\tau(z,t)|$ en función de la coordenada axial, para distintos valores del número de Womersley. A la derecha se muestran ampliaciones de la región central de la gráfica, donde se registran —en zonas muy cercanas— los esfuerzos de corte mayores y menores.

Como puede observarse en la figura I-5, la tensión de corte en el centro de la estenosis posee una forma aproximadamente senoidal, prácticamente en fase con el caudal. Los valores máximos alcanzados no superan 110, casi 28 veces el correspondiente a un flujo Poiseuille ($\tau_{\text{Poi}} = 4$). No existen diferencias visualmente apreciables para los diferentes números de Womersley explorados. Las curvas correspondientes a $z = 50$ y 53 muestran un comportamiento en común. En ambos casos, durante un lapso de tiempo ($3.5 < t < 6.5$ para $Wo = 5$, $4.5 < t < 6.75$ para $Wo = 11$ y $5 < t < 7$ para $Wo = 20$) el esfuerzo de corte en estas posiciones es prácticamente igual al que se registra en un conducto recto sin estenosis (como en $z = 92$). Poco después del comienzo del tercer semiciclo ($t > 2\pi$) se produce el desprendimiento del flujo sobre la pared de la estenosis y la formación de una recirculación aguas abajo de la misma. Aquellos lugares abarcados por el vórtice registran un valor de $\tau(z,t)$ negativo. Este es el comportamiento observado en $z = 50$ y 53 , y como resulta lógico, el fenómeno se observa con un pequeño retraso en el caso del último punto. En estas localizaciones, se observa un esfuerzo de corte promedio inferior al que se ve para $z = 92$. La influencia del parámetro de Womersley es pequeña, apreciándose un incremento en los valores máximos de $|\tau(z,t)|$ y un retardo del instante donde el vórtice alcanza estos lugares. El punto $z = 47$, donde se observan las tensiones tangenciales menores, muestra un comportamiento distinto a todos los otros casos. Prácticamente durante todo el ciclo el esfuerzo de corte en este lugar es negativo, excepto durante un breve lapso entre $t \sim 6$ y $t \sim 6.5$. La magnitud de las tensiones es inferior en el período $2\pi \leq t \leq 3\pi$ que durante el intervalo $\pi \leq t \leq 2\pi$. Como puede apreciarse, el parámetro de Womersley tampoco tiene demasiada influencia sobre $\tau(z,t)$ en este punto.

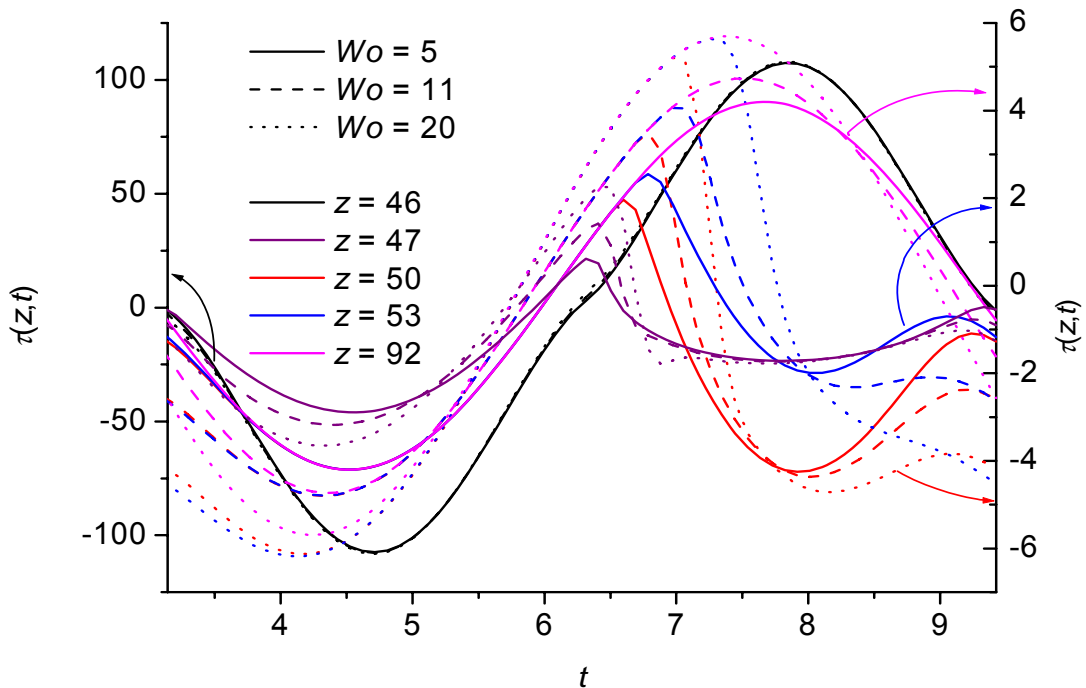


Figura I-5: Evolución temporal del esfuerzo de corte, para distintas posiciones a lo largo de la coordenada axial y distintos valores del número de Womersley. Debido a la disparidad de valores observados, se utilizaron diferentes escalas para algunas de las curvas.

A fin de obtener información adicional, se realizó un sencillo análisis frecuencial de las tensiones de corte ejercidas sobre la pared, mediante la descomposición de Fourier de esta variable:

$$\tau(z, t) = a_0(z) + \sum_n a_n(z) \text{sen}[nt + \phi_n(z)] \quad (6)$$

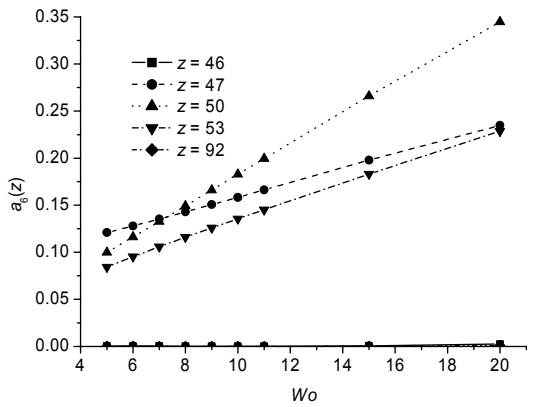
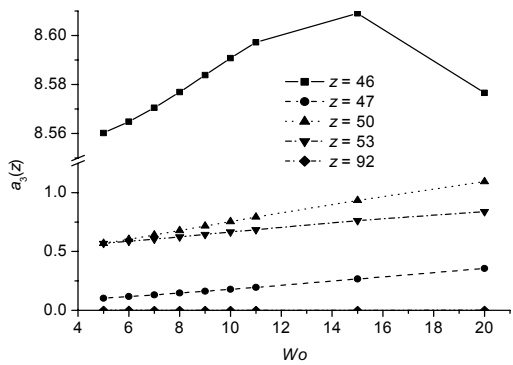
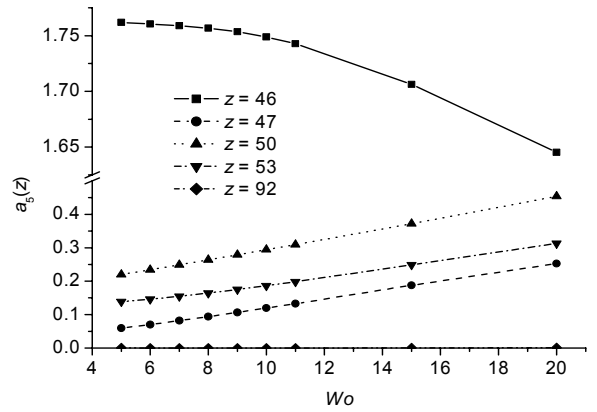
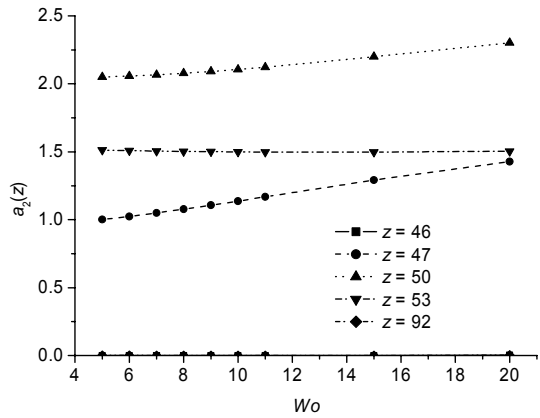
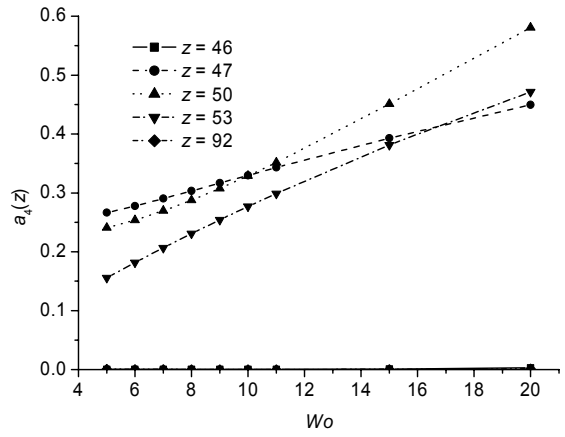
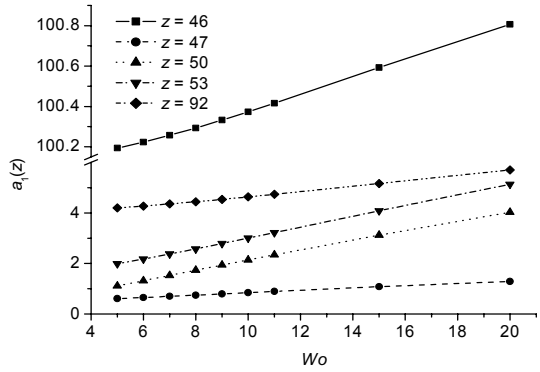


Figura I-6: Primeros coeficientes de la expansión de Fourier de $\tau(z,t)$ en función de Wo , para diferentes localizaciones axiales. El análisis se realizó en el intervalo de tiempo $\pi \leq t \leq 3\pi$.

La figura I-6 ilustra los coeficientes $a_n(z)$ correspondientes a los primeros 6 modos ($a_0(z)$ se muestra en la figura I-4) para los mismos puntos seleccionados en la figura I-5. Como puede verificarse, el esfuerzo de corte en $z = 92$ es prácticamente un armónico puro. La amplitud de este modo (ver $a_1(z = 92)$ en la figura I-6) es algo superior a 4 —el valor correspondiente a un flujo Poiseuille— y la misma crece ligeramente con el aumento de Wo . El análisis del esfuerzo para $z = 46$ (centro de la estenosis) confirma que el modo fundamental (a_1) es al menos un orden de magnitud más importante que los armónicos impares que se observan (ver a_3 y a_5 en la figura I-6). Tampoco en este caso existe una influencia remarcable del parámetro frecuencial, observándose un pequeño incremento de a_1 con el Wo . De hecho, el efecto de este parámetro sobre las tensiones observadas en los tres puntos restantes también es escaso, observándose en general un leve incremento en la magnitud de las componentes frecuenciales con el aumento de Wo . En estos lugares ($z = 47, 50$ y 53) las amplitudes de los distintos modos no son tan disímiles: los valores de a_1 son sólo un orden de magnitud mayores a los de a_6 . En particular, los coeficientes correspondientes a $z = 50$ y 53 son similares, mientras que los observados para $z = 47$ son algo menores.

I – 4 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos indican que, para el rango de parámetros y configuración geométrica estudiados, el número de Womersley no tiene gran influencia sobre las tensiones de corte ejercidas sobre la pared. En general, se observa que los valores máximos, registrados en la región estenosada, son prácticamente independientes de Wo , mientras que en las zonas donde existen recirculaciones y los esfuerzos cortantes son menores, el efecto de la frecuencia del pulso es un poco más notable. En estas regiones se observa, en general, un incremento moderado de $\tau(z,t)$ a medida que se incrementa Wo . El carácter oscilatorio de las tensiones es más complejo en las regiones de vórtices, lo cual se ve reflejado en la magnitud relativa de las diferentes componentes frecuenciales de Fourier de las mismas.

PARTE II: ESTUDIO COMPARATIVO DEL FLUJO EN ARTERIAS PARCIALMENTE OBSTRUIDAS CON LA PRESENCIA DE UN CATÉTER ANGIOPLÁSTICO: CATÉTER FINITO VS. CATÉTER INFINITO

II – 1 MODELO TEÓRICO

Las figuras II-1 y II-2 muestran las diferentes geometrías axisimétricas utilizadas para representar el dominio físico. Si bien cada placa de aterosclerosis posee una geometría tridimensional única que debería ser fielmente representada si se desea describir el flujo en ella con suficiente exactitud y detalle, el objetivo de este trabajo es realizar un análisis más general, no circunscripto a una geometría tan específica. Los dominios físicos analizados en este trabajo (ver [figuras II-1](#) y [II-2](#)) constituyen geometrías patrón, similares

a las utilizadas por [Banerjee y col. 1999](#) y [Banerjee y col. 2000](#) para representar estenosis arteriales, construidas a partir de imágenes angiográficas. Las mismas están divididas en distintas regiones, numeradas del I al VII. En este trabajo se considera que la forma de la pared arterial es la misma ([Moyaeri y col. 2003](#)), ya sea con el catéter introducido o sin él. Dicha hipótesis parece razonable debido a la rigidez que presentan estas estructuras, como consecuencia de la calcificación que normalmente experimentan ([Rubin y col. 1992](#)). Es claro que con este procedimiento no se pueden captar las características tridimensionales de la placa, pero como mostraron a través de varios resultados [Di Paolo y col. 2006](#), la influencia de la lesión en la caída de presión depende casi por completo de la longitud del canal y el grado de obstrucción. Esto otorga cierta confianza de que mediante la forma propuesta, se puede caracterizar un número importante situaciones fisiopatológicas.

La [figura II-1](#) corresponde a los casos donde se ha insertado un catéter; el esquema de la [figura II-1a](#) muestra la situación denominada aquí como “catéter infinito” (CI), donde el mismo atraviesa toda la extensión del dominio a lo largo de la coordenada axial, mientras que en las [figuras II-1b y II-1c](#) se observa que el extremo del catéter se ubica en las cercanías de la estenosis (aguas arriba o aguas abajo), y por lo tanto estos casos se refieren como “catéter finito” (CF). Si bien estos dispositivos son huecos en su totalidad, debido a que la sangre alojada allí se encuentra prácticamente estanca, aquí se adoptó una longitud finita para esta región. En la [figura II-2](#) se ilustra la situación donde el catéter no está presente, denominada “sin catéter” (SC). En todos los casos, la estenosis produce una oclusión máxima determinada por el radio mínimo de la pared arterial, R_E , que genera una obstrucción porcentual de la sección del vaso dada por

$$G_{est} = \left[1 - \left(\frac{R_E}{R} \right)^2 \right] \times 100\% \quad (7)$$

donde R es el radio de la arteria “sana”. Los parámetros geométricos restantes son: (i) R_C , radio del catéter; (ii) L_I, \dots, L_{VII} , longitudes de las regiones de los dominios correspondientes; (iii) l , longitud del interior del catéter; (iv) P_{punta} , posición del extremo del catéter; (v) T , período del pulso. Cabe destacar que en el caso CF, se adoptó que P_{punta} se localizara $5R$ aguas arriba de la región III y $5R$ aguas abajo de la región V.

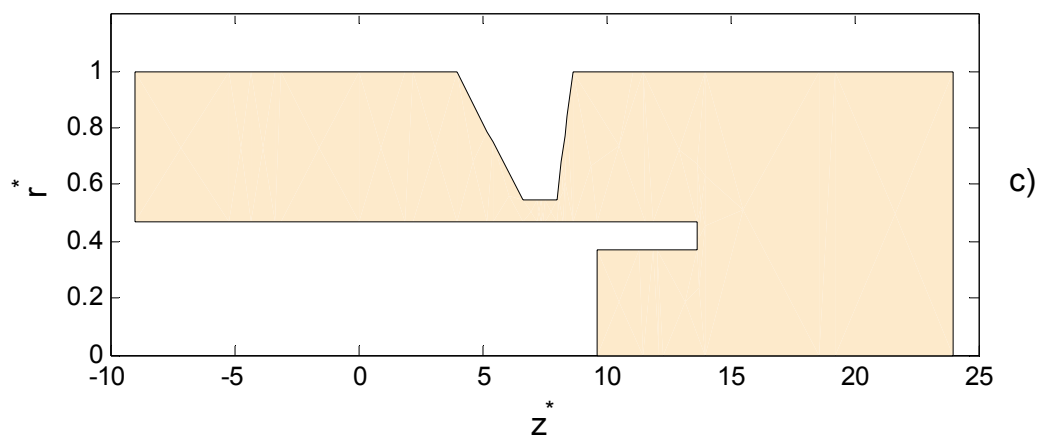
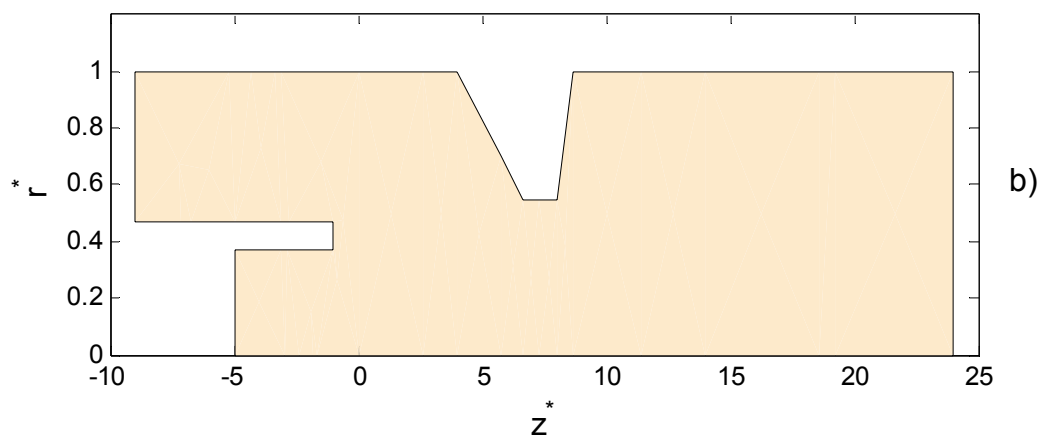
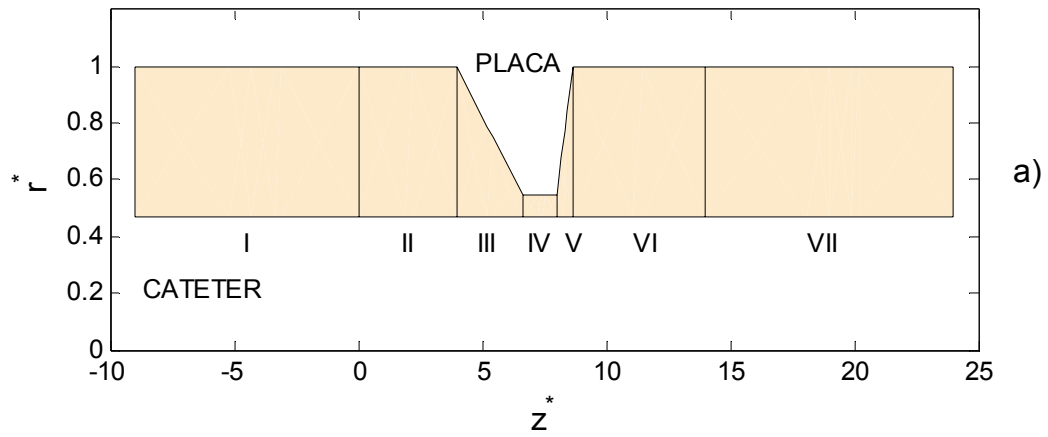


Figura II-1: Dominio de flujo, en presencia de un catéter introducido: a) Catéter Infinito (CI) b) Catéter Finito aguas arriba (CF) c) Catéter finito aguas abajo (CF). Las longitudes están adimensionalizadas con el radio de la arteria ($r^*=r/R$ y $z^*=z/R$).

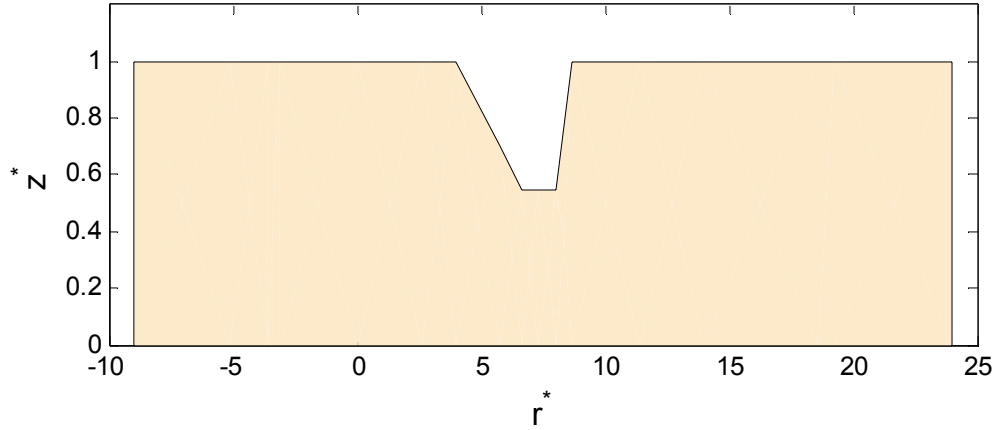


Figura II-2: Dominio de flujo en condición basal, o sea sin catéter presente (SC). Las longitudes están adimensionalizadas con el radio de la arteria ($r=r/R$ y $z=z/R$).

Las condiciones de contorno para el sistema formado por las ecuaciones (3) y (4) (ver además los esquemas de las figuras II-1 y II-2) son las siguientes: (i) sobre la pared arterial no hay deslizamiento, $v_r = v_z = 0$; (ii) en las paredes del catéter $v_r = v_z = 0$; (iii) en la sección de “salida”, ubicada aguas abajo de la estenosis, se impone $\partial v_z / \partial z = \partial v_r / \partial z = 0$; (iv) en la sección de “entrada”, suficientemente aguas arriba de la obstrucción, se impone un perfil de velocidades $v_z = U(r, t)$, el cual determina un caudal instantáneo ($Q(t)$) variable a lo largo del intervalo temporal de simulación, correspondiente a un ciclo cardíaco ($0 \leq t \leq T$). En el caso en que el catéter estuviera presente (figura II-1),

$$U(r, t) = \frac{2Q(t)}{\pi(R^2 - R_c^2)} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \ln \frac{R}{R_c} + \left[1 - \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{R}}{\left[1 - \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \right] \left\{ \left[1 + \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \right] \ln \frac{R}{R_c} - \left[1 - \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \right] \right\}} \quad (8)$$

mientras que si el mismo no estuviera inserto (figura II-2), las condiciones de borde (ii) cambian por: $\partial v_z / \partial r = 0$ y $v_r = 0$, en la línea de simetría. La velocidad $v_z = U(r, t)$, en la sección de entrada en este caso es:

$$U(r, t) = \frac{2Q(t)}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Nótese que estos perfiles de velocidad son de tipo Poiseuille. Si bien el fenómeno es pulsátil, los perfiles (8) y (9), para cada tiempo, son válidos si se imponen lo suficientemente lejos de la estenosis (DI Paolo y col. 2006). El caudal instantáneo ($Q(t)$) se muestra en la figura II-3 de manera normalizada, entre 0 y 1; su valor medio a lo largo del ciclo es $Q_m = \int_0^T Q(t) dt / T$ y representa aproximadamente un 53,7% del caudal máximo. La presión de referencia, $p = 0$, también es especificada en la sección de “entrada”.

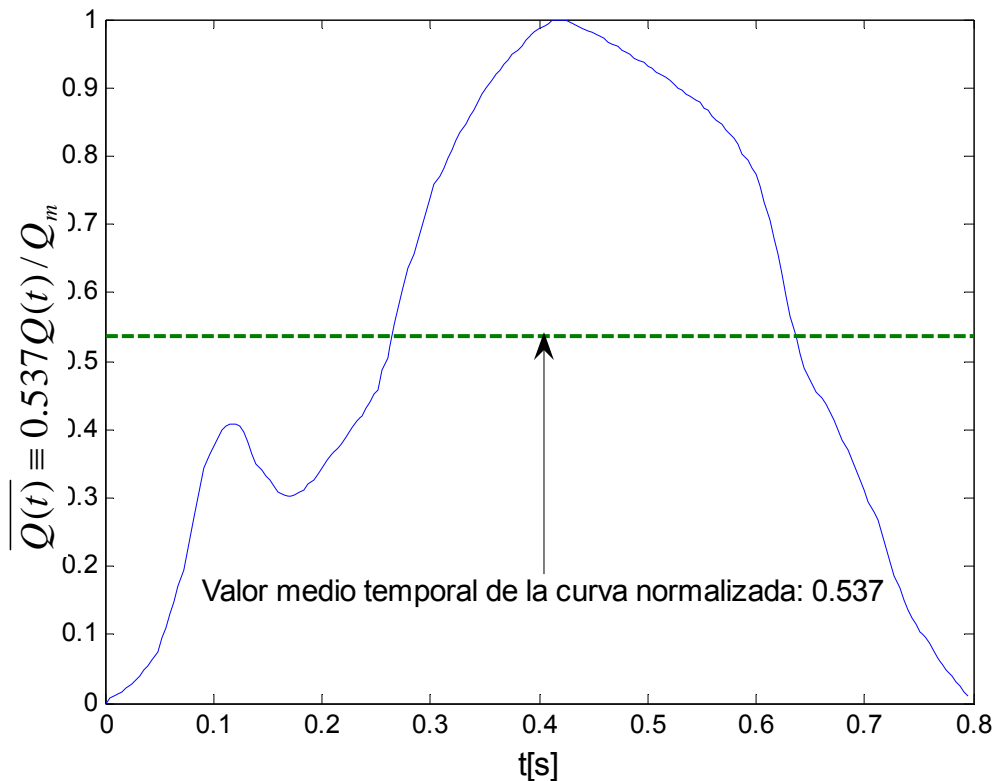


Figura II-3: Caudal instantáneo a lo largo del intervalo de simulación, correspondiente a un ciclo cardíaco. La curva se ha normalizado entre 0 y 1, ya que en el trabajo se han utilizado diferentes valores del caudal medio.

II - 2 METODOLOGÍA Y TÉCNICA NUMÉRICA

El modelo se resolvió mediante la utilización de software comercial, COMSOL Multiphysics 3.2a, que implementa el Método de los Elementos Finitos para resolver el sistema de ecuaciones (3) y (4) y sus condiciones de contorno. Se utilizó una malla no estructurada de elementos triangulares de Lagrange, cuadráticos para las componentes de velocidad y lineales para la presión. El paso de tiempo se selecciona automáticamente, aunque se impuso que 200 instantes de tiempo equidistante entre sí sean almacenados para posprocesar. El sistema de ecuaciones algebraicas resultante se resolvió por método directo (biblioteca SPOOLES). El programa se ejecutó sobre una PC con procesador Pentium IV de 3 GHz y 2 GB de RAM.

Las mallas utilizadas en cada caso se refinaron en forma conveniente en cada región, especialmente en III, IV y V, hasta que se logró una adecuada descripción del flujo y se verificó la independencia de los resultados con la discretización; una malla típica para este problema posee 43000 elementos.

II – 3 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Como se mencionara previamente, el objeto de este trabajo es modelar el proceso de medición de la presión sanguínea que realizan los catéteres angioplásticos (teniendo en cuenta que el dispositivo posee una longitud axial finita) y comparar los resultados obtenidos con los correspondientes para

modelos con catéteres de longitud infinita. Para ello se realizó una serie de experimentos numéricos utilizando valores típicos de las variables fisiológicas, en situaciones que contemplaron catéteres finitos (ubicados aguas arriba y abajo de la estenosis), catéteres infinitos y ausencia del catéter. En todas las simulaciones numéricas presentadas en este trabajo se emplearon las siguientes magnitudes de los parámetros físicos:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}; \quad \mu = 3.45 \times 10^{-3} \text{ Pa s}; \quad R = 1.5 \text{ mm}; \quad T = 0.8 \text{ s}; \\
 L_I &= 9R; \quad L_{II} = 4R; \quad L_{III} = 2.667R; \quad L_{IV} = 1.333R; \\
 L_V &= 0.667R; \quad L_{VI} = 5.333R; \quad L_{VII} = 10R; \\
 Q_m &= 10 \text{ ml min}^{-1}, 30 \text{ ml min}^{-1}, 50 \text{ ml min}^{-1}; \quad R_C = 0.2R, 0.3333R, 0.4R, 0.4667R; \\
 G_{est} &= 63\%, 70\%; \quad l = 4R; \quad P_{punta} = -R, 13.667R,
 \end{aligned} \tag{20}$$

En (10), L_X representa la longitud axial de la región X, según están definidas en la figura II-1. El caudal instantáneo varía a lo largo del ciclo cardíaco de acuerdo al pulso de la figura II-3, equivalente al utilizado por Banerjee y col. 1999, el cual fue obtenido mediante mediciones por ultrasonido Doppler en arterias coronarias de individuos sanos. Esta condición se impone en la sección de entrada mediante las ecuaciones (8) y (9). Sin duda la variable de mayor interés en la disciplina médica es la caída de presión que se produce en la estenosis, a partir de cuya medición el profesional puede evaluar el riesgo de la lesión previo a la intervención y la eficacia del procedimiento una vez que la estenosis ha sido tratada por angioplastia. Por esto, y por razones de espacio, los resultados presentados a continuación se abocarán casi por completo al análisis de la caída de presión mencionada.

Los resultados están organizados de la siguiente manera: en primer lugar se realiza la validación de los resultados obtenidos utilizando el software comercial, comparándolos con resultados previos obtenidos por los autores de este trabajo, utilizando códigos de elementos finitos construidos ad hoc; luego, se ilustra brevemente la influencia que produce la introducción de un catéter en el campo de velocidades y, finalmente se comparan las diferencias entre las mediciones de caída de presión que se registrarían con un catéter finito frente a las de un catéter infinito.

II – 3 -1 Validación

Di Paolo y col. 2006 validaron el modelo para fluido Newtoniano y su algoritmo de solución, con resultados publicados por Banerjee y col. 1999, trabajo en el cual se empleó el modelo de Carreau para la descripción del comportamiento reológico de la sangre. Ese estudio permitió validar adecuadamente la utilización del modelo Newtoniano, en particular para los caudales medios más bajos donde tienen mayor influencia las características no Newtonianas (Cho y col. 1991).

Para comparar los presentes resultados con los de Di Paolo y col. 2006, en este trabajo se empleó el conjunto de parámetros (10) con $G_{est} = 63 \%$, $R_C = 0,7 \text{ mm}$ y $Q_m = 10, 30 \text{ y } 50 \text{ ml min}^{-1}$; los resultados se presentan en la figura II-4. Todas las curvas mostradas en la figura II-4 corresponden a la presión actuante sobre la pared del conducto en las regiones II a VI, en función de la coordenada axial, para el instante del pulso cardíaco en el cual se produce el

caudal máximo ($t = 0,42$ s) y se presentan en las dimensiones más usuales de la disciplina médica (mmHg). La buena concordancia de los resultados obtenidos con el software COMSOL y aquellos publicados por [Di Paolo y col. 2006](#), validan adecuadamente la utilización del programa comercial.

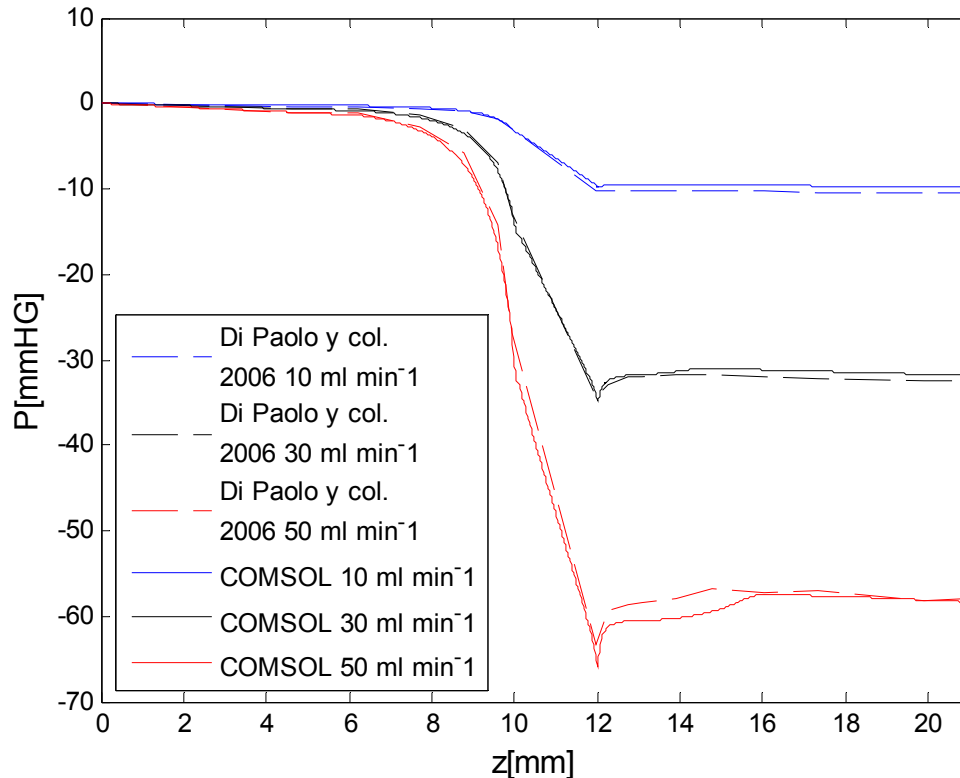


Figura 4: Presión en función de la coordenada axial.

II- 3 -2 Influencia del catéter en el campo de velocidades

En la situación fisiológica/clínica real, a medida que la sección transversal del vaso se vaya ocluyendo, con la introducción del catéter se producirá una disminución del caudal circulante a pesar de que el organismo intente mantenerlo. El grado de disminución del caudal dependería, entre otras variables, de la relación entre la resistencia al flujo del tramo arterial bajo estudio y la que posee la intrincada red vascular que se relaciona con el vaso analizado. Resulta claro que calcular la reducción del caudal producida por el bloqueo de un tramo arterial es sumamente complejo, por lo que debería recurrirse a técnicas de medición tales como ultrasonido Doppler para conocerla. Aún así, los datos obtenidos tendrían la incertidumbre de la medición realizada, y deberían obtenerse sobre una muestra representativa de especímenes, que posean distintos grados de estenosis, usando además catéteres con diferentes diámetros. Debido a las dificultades que reviste la obtención de la disminución del caudal para un grado de bloqueo determinado, en este trabajo, al igual que en otros previos ([Back 1994](#), [Sarkar y col. 1998](#), [Dash y col. 1999](#) y [Di Paolo y col. 2006](#)), se optó por mantener constante el valor de Q_m al comparar resultados entre las situaciones SC, CI y CF.

Para ilustrar el procedimiento de introducción de un catéter angioplástico en un tramo arterial parcialmente obstruido, se obtuvieron resultados para el conjunto de parámetros (10) para $G_{est} = 70$ % y $Q_m = 50$ ml min⁻¹, en cuatro situaciones

diferentes: SC, CF aguas arriba y aguas abajo de la estenosis, y por último CI. Las cuatro gráficas de la [figura II-5\(a-d\)](#) muestran un mapa de colores de la magnitud (con signo) de la componente de velocidad axial adimensional, y corresponden al instante del pulso cardíaco en el cual se produce el caudal máximo ($t = 0.42$ s).

En la [figura 5a](#) se muestra la situación SC (o fisiopatológica real), y se puede apreciar como la magnitud de la velocidad axial se incrementa notablemente al reducirse la sección de flujo en la región de la estenosis. En la [figura 5b](#) el catéter se ha introducido hasta una posición $5R$ antes del comienzo de la zona III (canal convergente). Con el catéter colocado en esta posición se puede ver que el flujo en la estenosis no se ve prácticamente alterado con respecto a la situación anterior, dado que el caudal Q_m se mantiene constante. En esta posición del catéter es donde se toman los registros aguas arriba de la estenosis en lo resultados que se verán luego. Por último, las [figura 5c](#) y [figura 5d](#) muestran el catéter con su punta ubicada aguas abajo de la estenosis y cuando ocupa toda la longitud axial del dominio (CI), respectivamente. Se puede ver que con la punta del catéter ubicada en dicha posición ($5R$ a la derecha de la zona V) hay poca influencia sobre el flujo en la región del canal (zona IV). Sin embargo, el registro de la presión se realiza en el interior de la punta para el caso del CF y sobre la pared exterior del catéter para el CI. Obviamente, las condiciones de flujo son diferentes en ambas situaciones y más adelante se van a evaluar dichas diferencias.

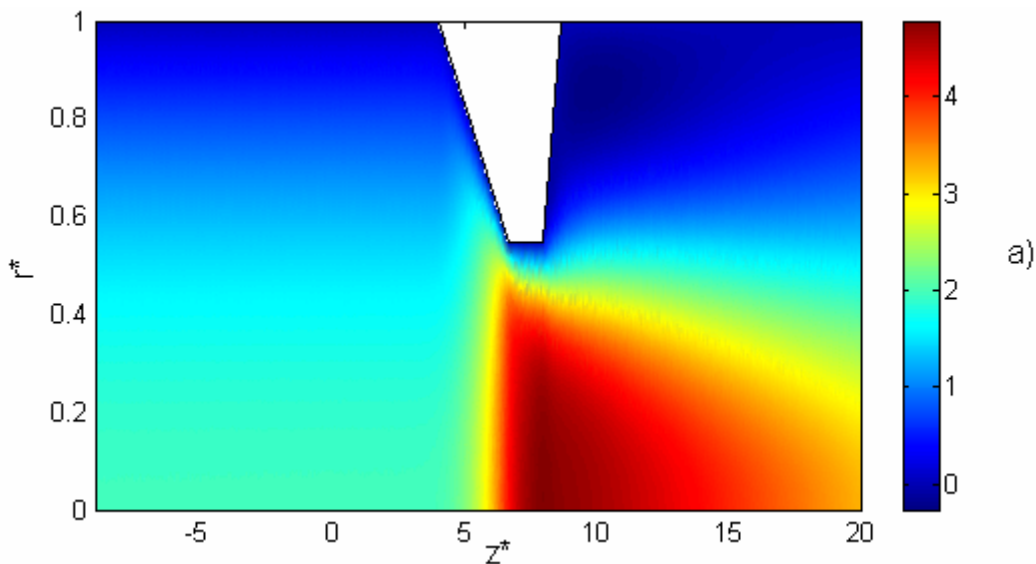


Figura II-5: Influencia del Catéter en la componente de velocidad axial: a) SC b) CF aguas arriba de la estenosis c) CF aguas abajo de la estenosis d) CI.

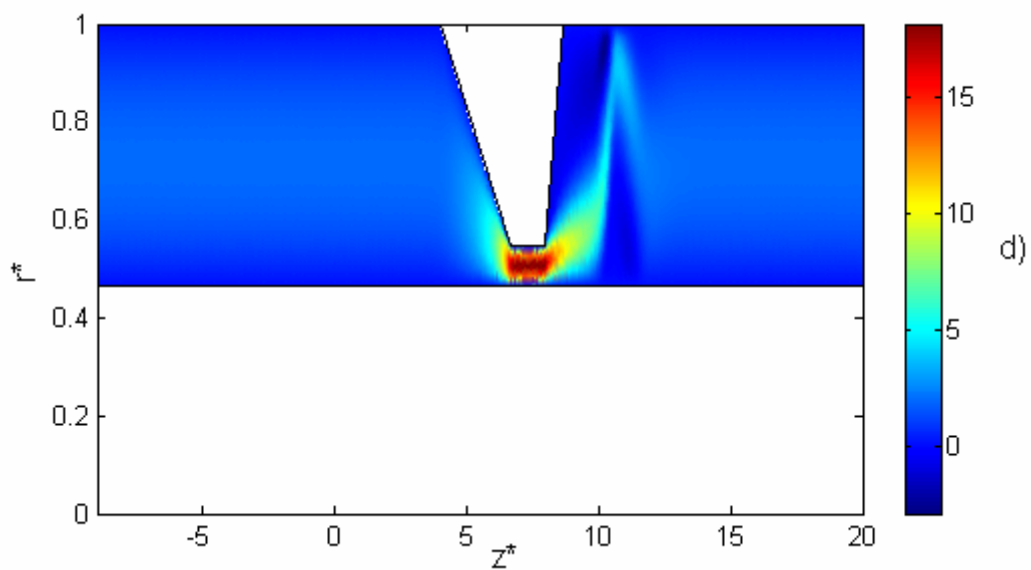
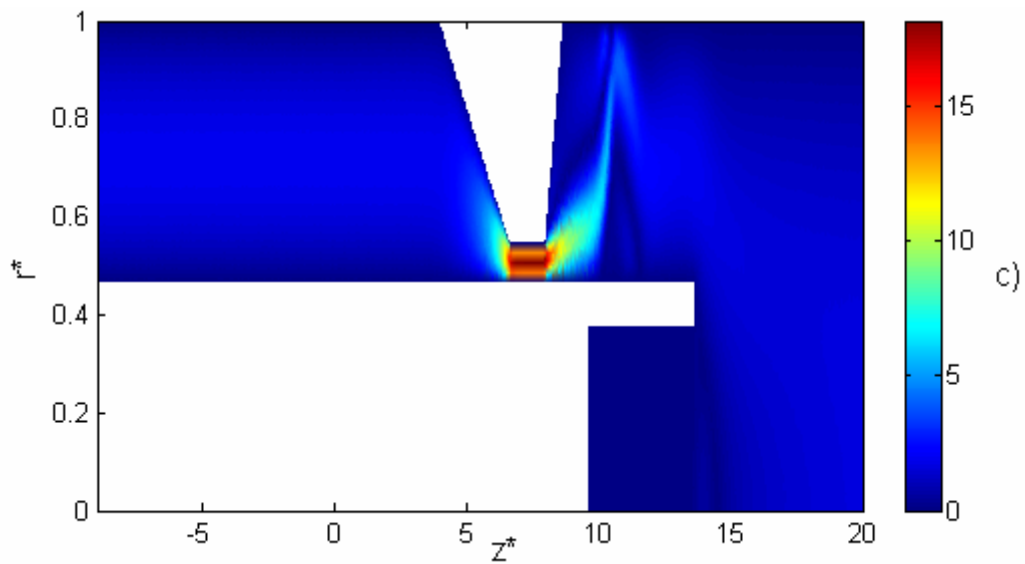
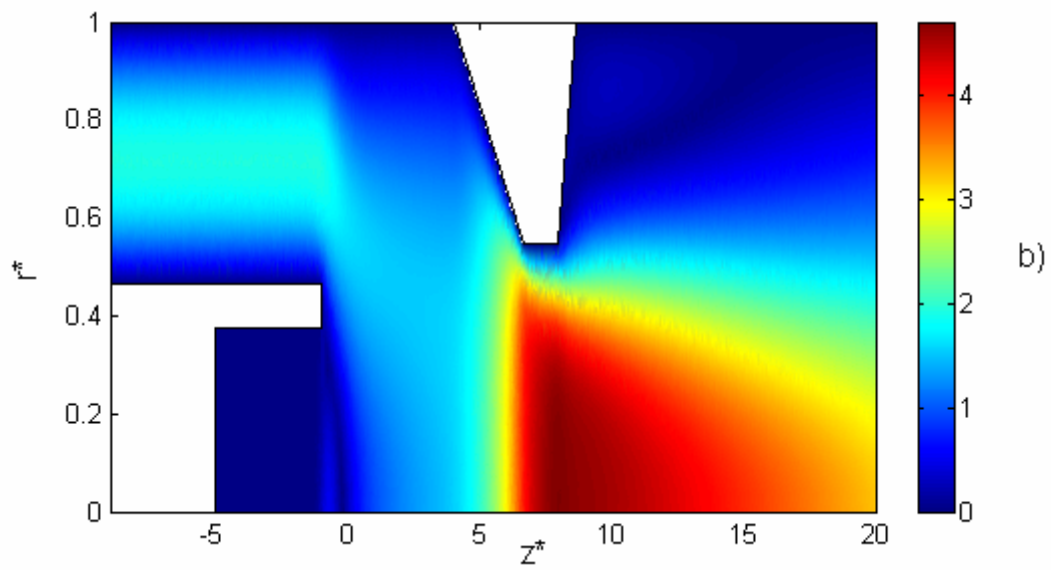


Figura II-5 (Continuación).

II – 3 – 3 Influencia del radio de un catéter angioplástico en la caída de presión transestenótica

La medición de la caída de presión se consideró como la diferencia de presión aguas abajo y aguas arriba de la estenosis, tomada en ciertos puntos de acuerdo con el siguiente criterio (ver [figura II-6](#)). Para los casos con CF la presión se registró dentro del líquido estanco alojado en la punta del catéter. Para los casos con CI, las presiones se registraron sobre la pared del catéter, en las posiciones axiales coincidentes con los extremos de la punta del catéter. Para el caso SC las presiones se tomaron en las mismas coordenadas axiales que en el caso CI, pero sobre la línea de simetría de la arteria. Los resultados se obtuvieron para el conjunto de parámetros (10) para $G_{est} = 70 \%$, $Q_m = 50 \text{ ml min}^{-1}$ y $R_c = 0.3, 0.5, 0.6$ y 0.7 mm .

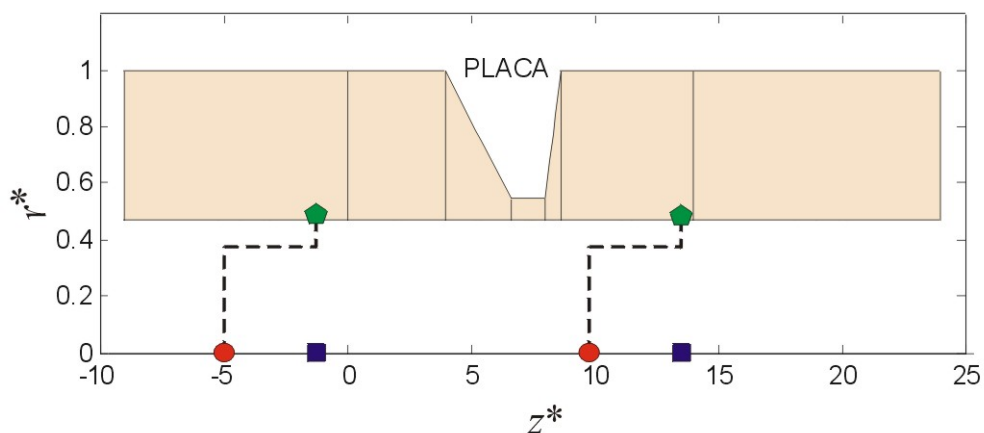


Figura II-6: Esquema de las coordenadas donde se registran las presiones, aguas abajo y arriba de la estenosis, para los diferentes casos analizados: círculos rojos (CF), pentágonos verdes (CI) y cuadrados azules (SC).

La [figura II-7](#) muestra la caída de presión en función del tiempo que se obtuvo para varios tamaños de catéteres infinitos. Puede apreciarse claramente que todas las curvas presentan una morfología similar a la del pulso de caudal instantáneo de la [figura II-3](#). Esto sugiere que los efectos de aceleración local son pequeños y que la solución no-estacionaria corresponde aproximadamente a una sucesión de estados cuasi-estacionarios ([Banerjee y col. 1999](#)). Esto está sustentado a través del cálculo del número de Womersley ($Wo = \rho R^2 / T \mu$), que en este caso particular posee un valor pequeño (0,856). Adicionalmente, se advierte que al aumentar el radio del catéter se incrementa la caída de presión como consecuencia del mayor grado de obstrucción resultante. Nótese que en la [figura II-7](#) se ha omitido la curva para la condición SC dado que se encuentra fuera de escala, alcanzando tan sólo 5.3295 mmHg para el máximo caudal.

La semejanza entre las curvas de caída de presión y caudal indica que son aproximadamente proporcionales; por ello se observa casi el mismo valor de ΔP en los instantes de tiempo donde coincide el caudal instantáneo ($Q(t)$). Por tal motivo, en la [figura II-8](#) se ilustra la caída de presión en función del caudal instantáneo, para los resultados de la [figura II-7](#). En ella se puede ver que la caída de presión crece y decrece en función del caudal recorriendo prácticamente el mismo camino; es decir, la histéresis del ciclo es

prácticamente despreciable.

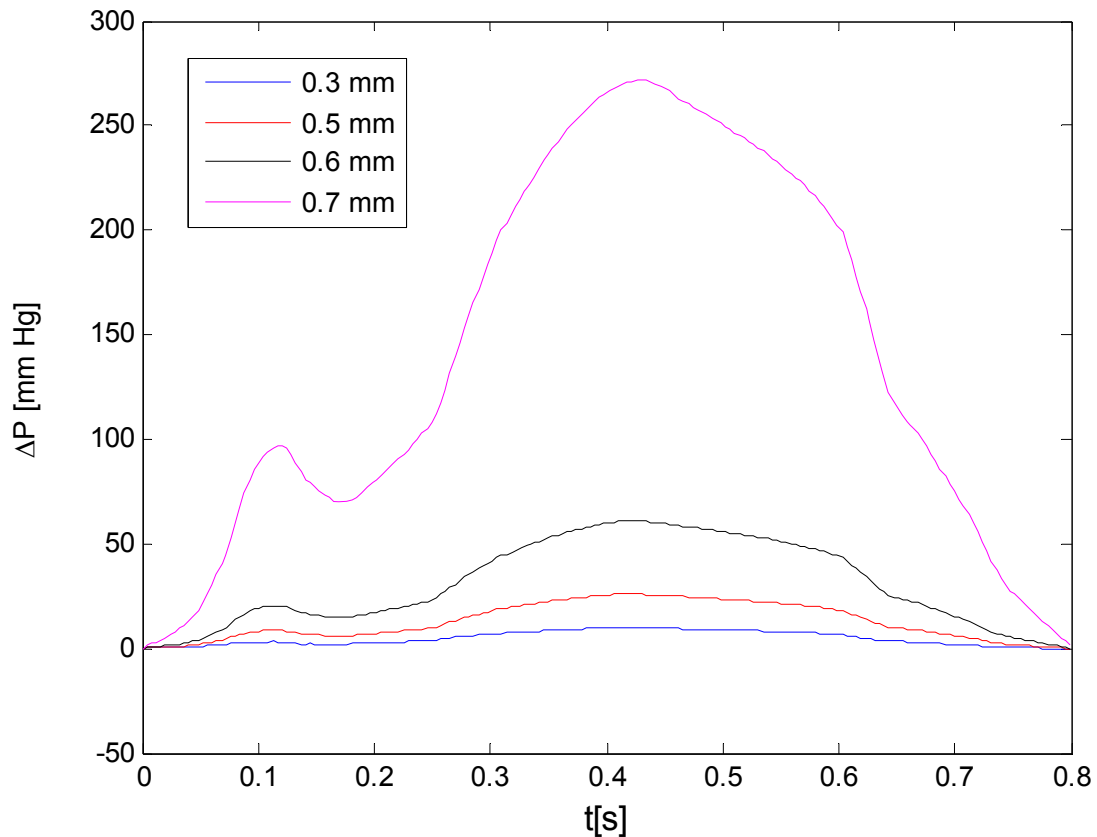


Figura II-7: Caída de presión transtenótica para CI.

Además de los registros de caída de presión para los casos con CI, en la [figura II-8](#) se han incluido las mediciones realizadas para los casos con CF. La observación de estos resultados indica que las diferencias entre las mediciones de caída de presión con CI y CF son despreciables. A modo de ejemplo, las mayores diferencias en las gráficas corresponden a $R_c = 0,7$ mm y son 1,5 mmHg para $Q(t) = 70$ ml min^{-1} , donde la caída de presión se encuentra alrededor de los 200 mmHg: esto indica que las diferencias porcentuales son menores al 1%.

Los resultados de [figura II-8](#) sugieren, por lo tanto, que para obtener una estimación razonable de la caída de presión que registraría un catéter angioplástico, no es necesario describir con exactitud la geometría de su punta o extremo; para ello bastaría con realizar simulaciones con un catéter infinito del mismo radio y tomar los registros de presión en las posiciones donde se ubicaría la punta del catéter. Esta metodología simplifica mucho las simulaciones, ya que el dominio y su discretización son mucho más complicados para el caso de CF.

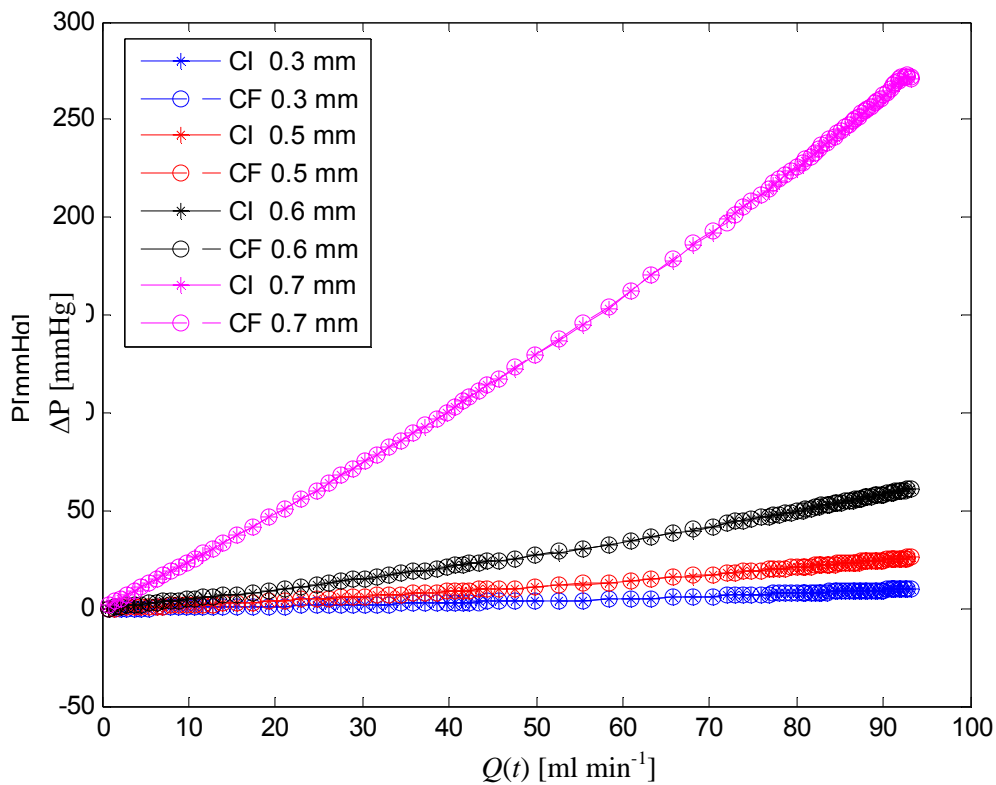


Figura II-8: Comparación caída de presión con CI y CF para diferentes radios de catéter.

II – 4 CONCLUSIONES

Los resultados, obtenidos para el conjunto de parámetros utilizados por [Di Paolo y col. 2006](#), muestran que a pesar de la fuerte influencia del tamaño del catéter sobre la caída de presión en la estenosis, no se alteran notablemente los valores de esta variable al considerar un catéter infinito respecto de uno finito. Esta situación permite establecer que la aproximación de catéter con longitud axial infinita adoptada por [Di Paolo y col. 2006](#), describe adecuadamente el comportamiento de la variable de mayor interés –la caída de presión translesional– con un modelo geoméricamente más sencillo y con un menor costo computacional.

CONCLUSIONES GENERALES

En este trabajo se han analizado fenómenos de flujo sanguíneo pulsátil a través de la solución de modelos simplificados por la suposición de geometría axisimétrica. En todos los casos estudiados se supuso un tramo de conducto parcialmente obstruido, con una forma rígida conocida, siendo los parámetros utilizados característicos de arterias de pequeño y mediano calibre.

Primeramente se analizó la influencia de la frecuencia de un pulso de caudal senoidal conocido sobre las variables hidrodinámicas fundamentales: presión y velocidad. Particularmente, fueron analizadas indirectamente mediante el esfuerzo cortante en la pared arterial (obtenido mediante un posproceso),

variable que se supone de fundamental importancia para la aparición y/o crecimiento de las placas obstructivas.

Las soluciones numéricas se obtuvieron mediante una técnica basada en el método de elementos finitos, con una formulación estándar. Los resultados obtenidos indican que, el efecto de la frecuencia del pulso es un poco más notable en las zonas donde existen recirculaciones y los esfuerzos cortantes son menores. En estas regiones se observa, en general, un incremento moderado del esfuerzo de corte oscilatorio, a medida que se incrementa la frecuencia del pulso.

Análisis de este tipo podrían ser de interés en el estudio de la evolución de una patología aterosclerótica incipiente y/o en desarrollo, dado que otros autores han encontrado una fuerte correlación entre la localización de la lesión con los sitios donde el esfuerzo de corte es particularmente bajo y de carácter oscilatorio. En estos nuevos estudios sería importante la utilización de modelos más realistas desde el punto de vista geométrico.

En segunda instancia, siguiendo con la utilización de modelos axisimétricos, se modeló el proceso de medición de la presión sanguínea que realizan los catéteres angioplásticos (teniendo en cuenta que el dispositivo posee una longitud axial finita) y se compararon los resultados obtenidos con los publicados para modelos con catéteres de longitud infinita. El modelo en ecuaciones fue resuelto mediante un algoritmo computacional basado en el Método de los Elementos Finitos utilizando software comercial; este modelo fue validado con resultados previamente publicados. Los resultados indican que la suposición de catéter con longitud axial infinita describe adecuadamente el comportamiento de la variable de mayor interés: la caída de presión translesional. De acuerdo a ello, tanto el modelo como la técnica de solución, resultan mucho más sencillas y demandan un menor costo computacional.

Ambas partes de este trabajo muestran la utilidad de las geometrías axisimétricas para la construcción de modelos de flujo que permitan obtener, de un modo no invasivo, un reflejo cualitativo y cuantitativo de las principales variables que dominan el flujo. Esta ventaja se acrecienta habida cuenta de que dichos modelos se resuelven con fuerte economía de cálculo respecto a modelos 3D, demandando sólo recursos computacionales estándares.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional de Entre Ríos por los aportes financieros que permitieron el normal desenvolvimiento del PID 6072 "Análisis Computacional de Flujos Sanguíneos".

REFERENCIAS

ANDERSON, H.V.; ROUBIN, G.S.; LEIMGRUBER , P.P.; COX , W.R.; DOUGLAS JR.; J.S.; KING , S.B.; GRUENTZIG, A.R. (1986). Measurement of transstenotic pressure gradient during percutaneous transluminal coronary angioplasty, *Circulation*, Vol. 73, pp. 1223-1230.

BACK, L.H. (1994). Estimated mean flow resistance increase during coronary catheterization, *Journal of Biomechanics*, Vol. 27, N 2, pp. 169-175.

BACK, L.H.; KWACK, E.Y.; BACK M.R. (1996). Flow rate-pressure drop relation in coronary angioplasty: catheter obstruction effect, *Journal of Biomechanic. Engineering*, Vol. 118, pp. 83-89.

BANERJEE, R.K.; BACK, L.H.; BACK, M.R.; CHO, Y.I. , Catheter obstruction effect on pulsatile low rate-pressure drop during coronary angioplasty, *Journal of Biomechanic Engineering*, Vol. 121, pp. 281-289, (1999).

BANERJEE, R. K.; BACK, L.H.; BACK, M.R.; CHO, Y.I. (2000). Physiological Flow Simulation in Residual Human stenoses After Coronary Angioplasty, *Journal of Biomechanics. Eng.*, Vol. 122, pp. 310-320.

CHO, Y.I.; KENSEY, K.R. (1991). Effects of the non – newtonian viscosity of blood on flows in diseased arterial vessel. *Part 1: Steady flows, Biorheology*, Vol 28, pp. 241-262.

DAS, B.; JOHNSON, P.C.; POPEL, A.S. (2000). Computational fluid dynamic studies of leukocyte adhesion effects on non-Newtonian blood flow through microvessels. *Biorheology*, 37(3): 239-258.

DASH, R. K.; JAYARAMAN, G.; METHA, K. N. (1999). Flow in a catheterized curved artery with stenosis, *Journal of Biomechanics*, Vol. 32, pp. 49-61.

DEMMELE, J.W.; EISENSTAT, S.C.; GILBERT, J.R.; LI, X.S, LIU J.W.H. (1999). A supernodal approach to sparse partial pivoting. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 20: 720-755.

DI PAOLO, J.; FILIPOWICZ, G. H.; UBAL, S.; CAMPANA, D. M. (2006). Influencia del radio del catéter angioplástico sobre la caída de presión transtenótica en arterias coronarias. Análisis numérico, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 22, 3, pp 261-275.

FRY. D.L. (1968). Acute vascular Endothelial Changes Associated with Increased Blood Velocity Gradients. *Circulation Research*, 22: 165-197.

KAMIYA A.; ANDO, J. (1996). Response of Vascular Endothelial Cells to Fluid Shear Stress: Mechanism. In HAYASHI, K.; KAMIYA, A and ONO K. (eds.). *Biomechanics. Functional Adaptation and Remodeling*. Tokio: Springer-Verlag.

KU., D.N. (1997). Blood flow in arteries. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 29:399-434.

MOAYERI, M. S. Y ZENDEHBUDI, G. R. (2003). Effects of elastic property of the wall on flow characteristics through arterial stenoses, *Journal of Biomechanics*, Vol. 36, N 4, pp. 525-535.

NEREM R.M.; CORNHILL, J.F. (1980). The role of fluid mechanics in atherogenesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 102: 181-189.

RUBIN, E.; FARBER, J. L. (1992). Patología, *Ed. Médica Panamericana*.

SARKAR, A.; JAYARAMAN, G. (1998). Correction to flow rate-pressure drop relation in coronary angioplasty: steady streaming effect, *Journal of Biomechanics*, Vol. 31, pp. 781-791.

SATO, M.; KATAOKA, N.; OHSHIMA, N. (1996). Response of Vascular Endothelial Cells to Flow Shear Stress: Phenomenological Aspect. In HAYASHI, K.; KAMIYA, A and ONO K. (eds.). *Biomechanics. Functional Adaptation and Remodeling*. Tokio: Springer-Verlag.

WILLE, S.O. (1982). Finite Element Simulations of the Pulsatile Blood Flow Patterns in Arterial Abnormalities. In GALLAGHER, R.H.; SIMON, B.R.; JOHNSON, P.C. and GROSS, J.F. (eds.). *Finite Elements in Biomechanics*. John Wiley & Sons.

WOMERSLEY, J.R. (1955). Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when their pressure gradient is known. *J. Physiol.*, 127: 553-563.